Integral-Rechnung

von

Winkler

I. Curs

Carl Kleÿ.

1848.

Einleitung.

<u>Verwandlung der elementaren Funktionen.</u> Die folgenden Verwandlungen bestehen in analytischer Umformung gegebener Ausdrücke entweder mit oder ohne Einführung einer neuen Größe. Man theilt die Funktionen in zwei große Klassen ab; nämlich algebraische u. transcendente Funktionen.

Die algebr. zerfallen wieder in rationale u. irrationale Funktion. Die rationalen in ganze u. gebrochene Funktionen. Die transcendenten Funktionen bestehen aus den trigonometrischen Funktionen und denjenigen, welche sich im Verlaufe der Integralrechnung ergeben u. die man dann nach dem Interesse, das man an ihnen gefunden hat, eintheilt.

Rationale Funktionen. Eine ganze rationale Funktion ist das Aggregat ganzer positiver Potenzen v. x behaftet mit constanten Coefficienten also:

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \dots \dots px + q,$$ ist eine ganze rationale Funktion u. zwar vom Grade m

Eine rational gebr. Funktion ist der Quotient 2er ganzer Fktion

$$\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2} \dots \dots px+q}{a_1x^n+b_1x^{n-1}+c_1x^{n-2} \dots \dots p_1x+q_1}$$

u. zwar eine <u>unächt gebrochene</u> Funktion, wenn m gleich od. größer als n ist. Eine <u>ächt gebrochene</u>, wenn $m <$ als n ist. Aus einer unächt gebrochenen Funktion läßt sich jederzeit eine ganze rationale Function ausziehen u. zwar vom Grade $(m-n)$, so daß eine ächt gebr. Funktion übrig bleibt, deren Zähler mindestens um einen Grad niedriger ist, als der Nenner. Die Ausscheidung der ganzen Funktion geschieht auf dem Wege der gewöhnlichen Division. — Wir sehen voraus, es sei der Bruch bereits auf diese Weise verwandelt, so daß wir es nur mit ächt-gebrochenen Funktionen zu thun haben. Es ist für die Folge von Wichtigkeit eine solche ächt-gebrochene Funktion durch ~~[illegible]~~ in einfache Brüche zu zerlegen, wozu die einfache Bemerkung aus der Algebra dient, daß wenn man zwei oder mehrere ächt gebrochene Funktionen durch Addition in einen einzigen Bruch verwandelt, der Zähler desselben mindestens um einen Grad niedriger ist, als der Grad des Nenners. Umgekehrt also wird man einen solchen Bruch immer in einfache Brüche zerfällen können deren Nenner die Faktoren sind, in welche sich der Nenner des gegebenen Bruchs zerfällen läßt.

Was die Zerfällung des Nenners in seine einfachen Faktoren betrifft, so gehört diese Sache der Auflösung der Gl. an u. kann daher voraus gesetzt werden. Es läßt sich nämlich der Bruch:

$$\frac{ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\ldots\ldots px+q}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_n)}=\frac{F(x)}{\varphi(x)}$$

in n Brüche zerlegen, deren Nenner beziehungsweise die linearen Factoren $(x-\alpha_1)$, $x-\alpha_2)$, … u. deren Zähler also constante Größen sein müssen, so daß man setzen kann

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\frac{A_3}{x-\alpha_3}+\ldots\frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

Entfernt man aber die Brüche aus der Gl. so ergiebt sich

$$\begin{aligned} ax^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}\ldots px+q = {} & A_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) \\ & + A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) \\ & + A_3(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)\cdots(x-\alpha_n) \\ & + \ldots \\ & \vdots \\ & + A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

Wird die Multiplic. ausgeführt u. die Coefficienten der gleichen Potenzen v. x zusammengefaßt, so wird die rechte Seite der Gl. die Form annehmen

$$= Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots\; Px+Q$$

welche Gleichheit stattfinden muß für alle Werthe der in ihr vorkommenden Größen, also auch für alle Werthe v. x, was bekanntlich nur dann der Fall ist, wenn man hat

$$a=A,\quad b=B;\ \ldots\ldots\ p=P;\quad q=Q.$$

Dieses sind die n Bedingungsgleichungen, welchen die Coeffic. A_1, A_2 etc. A_n genügen müssen.

Es ist wesentlich zu bemerken, daß diese Gl. in Bezug auf diese Größen sämmtlich vom ersten Grade sind u. daß man also n linearen Gl. mit n ~~Gl.~~ Unbekannten hat, aus welchen sich diese ganz eindeutig ergeben müssen. Was nun die Bestimmung der Coefficienten selbst betrifft, so kann man sich entweder dieser n Gl. bedienen, oder was in manchen Fällen bequemer sein dürfte für x so viele beliebige Werthe in die von den Nennern befreite Gl. einzusetzen, als Coefficienten zu bestimmen sind u. aus diesen Gl. alsdann die Coefficienten selber ableiten.

Es läßt sich jedoch ein allgemeines Schema für die Coefficienten angeben. Es ist nämlich wie nachgewiesen worden, wenn die Gl. $\varphi x=0$ keine gl. Wurzeln darbietet u. $f(x)$ von niedrigerem Grade ist, als $\varphi(x)$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots\ldots\frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

Oder, wenn man mit $\varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$ die Gleichung multiplicirt

$$\begin{aligned} f(x) = {} & A_1(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n) \\ & + A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n) \\ & + \cdots\cdots \\ & \;\vdots \\ & + A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

Um einen beliebigen Coefficienten A_ν zu finden braucht man nur $x=\alpha_\nu$ zu setzen, weil dann alle übrigen Coefficienten herausfallen müssen. Man erhält alsdann

$$A_\nu = f(\alpha_\nu)\,\frac{1}{(\alpha_\nu-\alpha_2)(\alpha_\nu-\alpha_3)\cdots(\alpha_\nu-\alpha_n)}$$

so daß man unter der gemachten Voraussetzung erhält

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = {} & \frac{f(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_1} \\ & + \frac{f(\alpha_2)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_2-\alpha_n)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_2} \\ & + \cdots\cdots \\ & \;\vdots \\ & + \frac{f(\alpha_n)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}\cdot\frac{1}{x-\alpha_n} \end{aligned}$$

Diese Formel ergibt sich auf der Stelle aus einem Satze, welcher schon in der niedern Analysis vorkommt, nämlich aus der Lagrange'schen Interpolations-Formel. Man erhält dieselbe kurz auf folgende Art:
Es seien $F(x)$ u. $f(x)$ zwei rationale ganze Functionen v. x welche für eine größere Anzahl von Werthen v. x als der Grad jeder dieser beiden Functionen beträgt, einander gleich werden, oder mit andern Worten, welche geometrisch verzeichnet eine größere Anzahl von Punkten gemeinsam haben, als der Grad beider beträgt, so läßt sich zeigen daß diese beiden Functionen vollkommen identisch sein oder geometrisch gesprochen, daß ihre beiden Curven vollständig zusammenfallen müssen. Um dies zu zeigen, bilde man die Differenz der beiden Functionen

$$F(x) - f(x) = \psi(x),$$ so wird auch $\psi(x)$ eine Function sein deren Grad geringer ist, als die genannte Anzahl v. Werthen v. x; der Voraussetzung nach wird aber $\psi(x)$ öfter zu 0, als ihr Grad beträgt, was absurd ist, also muß identisch $F(x) = f(x)$ sein.

bildet man die Produkte

$$\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}\cdot f(\alpha_n)$$

$$\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_{n-1}-\alpha_1)(\alpha_{n-1}-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}\cdot f(\alpha_{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}\cdot f(\alpha_1)$$

und $f(x)$ vom niedrigeren Grade als dem n^{ten} sein soll, so muss die Summe dieser Produkte $= f(x)$ sein nach dem vorhergehenden Lehrsatz. Dies ist die bekannte Interpolationsformel.

Aus dieser Formel ergibt sich sogleich der oben gefundene Ausdruck für die Zerfällung in Partialbrüche, wenn man durch das Produkt

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$

die ganze Gl. dividirt.

Die Formel lässt sich etwas bequemer schreiben wenn man sich der Differenzialbezeichnung bedient. Differenzirt man nämlich die Factor $\varphi(x)$ so wird man erhalten

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = {} & (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)\\ & (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)\\ & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)\cdots(x-\alpha_n)\\ & \vdots\\ & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{n-1})\end{aligned}$$

Setzt man darin successive $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ bis α_n so wird man finden, dass

$\varphi'(\alpha_1), \varphi'(\alpha_2) \ldots\ldots \varphi'(\alpha_n)$ welche die Werthe der Differenzialquotienten v. $\varphi(x)$ resp. für $x=\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ darstellen, genau den Nennern von $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3) \ldots f(\alpha_n)$ in unserer Formel gleich sind, so dass man also schreiben kann

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{f(\alpha_2)}{\varphi'(\alpha_2)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots \frac{f(\alpha_n)}{\varphi'(\alpha_n)}\cdot\frac{1}{x-\alpha_n}$$

Wenn $\varphi(x)$ ein reelles Polynom ist und es bietet die Gl. $\varphi x = 0$ imaginäre Wurzeln dar, so kommen diese bekanntlich immer paarweise vor, d. h. wenn $\alpha_1 = p+q\sqrt{-1}$ ist, so kommt gleichzeitig immer auch eine

Wurzel α_2 vor, welche $= p - q\sqrt{-1}$ ist. So sind dann α_1 u. α_2 sogenannt conjugirte Wurzeln. So werden nun aber die Coefficienten der entsprechenden Partialbrüche auch imaginär. Man kann sie jedoch immer unter die Form bringen, in welcher das Reelle vom Imaginären getrennt ist, d. h. man kann setzen

$$\frac{f(p+q\sqrt{-1})}{\varphi'(p+q\sqrt{-1})} = P + Q\sqrt{-1}$$ alsdann wird der 2te Coefficient

$$\frac{f(p-q\sqrt{-1})}{\varphi'(p-q\sqrt{-1})} = P - Q\sqrt{-1}$$ Dieses vorausgesetzt, lässt sich nun zeigen, dass die Summe der beiden conjugirten Partialbrüche reel ist, denn sie gehen über in:

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{x-p-q\sqrt{-1}} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{x-p+q\sqrt{-1}} = \frac{2(x-p)P - 2Qq}{(x-p)^2+q^2}$$

Obschon nun der Nenner nicht mehr linear ist, so zieht man es doch in den folgenden Anwendungen vor, einen reelen Bruch mit quadratischem Nenner, als 2 imaginäre Brüche mit imaginären linearen Nennern zu haben. Enthält die Gl. $\varphi(x)=0$ noch mehr Paare gleicher Wurzeln so kann man mit den entsprechenden Partialbrüchen auf gleiche Weise verfahren. Dies vorausgesetzt seien

α_1, α_2; ferner α_3, α_4; ferner $\alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7 \ldots$

imaginäre conjugirte Wurzeln v. $\varphi(x)$, so nimmt man für die Zerfällung des gegebenen Bruchs folgende Form an.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} + \frac{A_2x+B_2}{(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{C_1}{x-\beta_1} + \frac{C_2}{x-\beta_2} + \ldots\ldots$$

wo β_1 u. β_2 .... die reellen Wurzeln sind.

So kann z. B. der Bruch

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{((x-m)^2+n^2)((x-p)^2+q^2)(x-\beta)(x-\gamma)}$$ auf folg. Weise zerfallen

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x-m)^2+n^2} + \frac{A_2x+B_2}{(x-p)^2+q^2} + \frac{C_1}{x-\beta} + \frac{C_2}{x-\gamma}$$

Die Coefficienten bestimmt man auf die früher angegebene Weise.

Wenn die Gl. mehrere Gruppen gl. Wurzeln darbietet, so dass man hat:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^m (x-\beta)^n \ldots\ldots$$

so kann man die frühere Zerfällungsform nicht mehr anwenden, wohl aber wird man setzen können.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-\beta)^n} + \dots$$

wo $P(x)$, $P_1(x)$ ..... resp. vom Grade $m-1$, $n-1$, sind. Denn entfernt man die Nenner, so wird jedes der Produkte $P(x)(x-\beta)^n(x-\gamma)^p$ .... von einem um 1 niedrigern Grade als $\varphi(x)$ sein.

Da nun $P(x)$ $P_1(x)$ .... resp. m, n .... unbestimmte Coefficienten enthalten, so ist die Anzahl dieser so groß, als der Grad von $\varphi(x)$ und da $f(x)$ im höchsten Fall ebensoviele Coefficienten enthalten kann, so hat man durch Gleichsetzung der Coefficienten ebensoviele Gl. als Unbekannte (Coeffic.), woraus die Möglichkeit der Zerfällung hervorgeht.

Für die folgenden Anwendungen genügt jedoch diese Zerfällung noch nicht, denn man wünscht den einzelnen Partialbruch mit constanten Zählern zu erhalten.

Daß der Bruch

$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m}$ sich so zerfallen lassen muß, kann man auf der Stelle wie folgt sehen

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^m} = \frac{a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots k x + l}{(x-\alpha)^m}$$

Setzt man $x = z + \alpha$ so geht die rechte Seite der Gleichung über in

$$= \frac{a(z+\alpha)^{m-1} + b(z+\alpha)^{m-2} + \dots (k(z+\alpha)+l}{z^m}$$

Entwickelt man nun die Potenzen im Zähler nach dem binomischen Lehrsatz, so wird man nach Zusammenfassung der gleichnamigen Potenzen erhalten

$$= \frac{A z^{m-1} + B z^{m-2} + \dots K z + H}{z^m}$$

$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots \frac{K}{z^{m-1}} + \frac{H}{z^m}$$

$$= \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} \dots \frac{K}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{H}{(x-\alpha)^m}$$

Verfährt man mit den übrigen Brüchen auf gleiche Weise, so wird man schließlich erhalten.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha}$$

$$+ \frac{B_n}{(x-\beta)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-\beta)^{n-1}} + \dots \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{B_1}{x-\beta}.$$

$$+ \dots$$

Dieser Fall ist allgemeiner, als der frühere, denn man erhält für $m = n = p = 1$ wieder das alte Schema der Zerfällung

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \dots$$

Was nun die Bestimmung der Coefficienten
$A_m, A_{m-1} \dots B_n, B_{n-1}$ betrifft, so kann man wieder nach der Methode der unbestimmten Coefficienten verfahren oder aber, was meistens bequemer ist nach einer v. Euler zuerst angewandten Methode.
Man entferne nämlich die Nenner aus der Gl. so wird man haben.

$$\varphi(x) = A_m \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^m} + A_{m-1} \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots A_1 \frac{\psi(x)}{x-\alpha}$$

$$+ B_n \frac{\psi(x)}{(x-\beta)^n} + B_{n-1} \frac{\psi(x)}{(x-\beta)^{n-1}} + \dots B_1 \frac{\psi(x)}{x-\beta}$$

$$+ \dots$$

u. differenzirt man nun die Gl. $(m-1)$ mal hinter einander (immer in der größten (Exponent)) u. setzt in die so erhaltenen Differenzial Gl. $x = \alpha, = \beta, = \dots$, so werden die Coefficienten sich bestimmen lassen.
Eine andere practische Bestimmungsweise für bemerkt werden. Obige Gl. enthält keine Brüche mehr. Wir wollen, um es zuerst nur mit den Coefficienten A zu thun haben, die ganze Function, welche die Glieder der ersten Reihe folgenden Summen bildet, der Kürze halber mit $\Theta(x) \cdot (x-\alpha)^m$ bezeichnen, wo $\Theta(x)$ nothwendig eine ganze rationale Function sein muss, so dass sich also die Gl. wie folgt schreiben läßt:

$$\varphi(x) = \left(A_m + (x-\alpha) A_{m-1} + (x-\alpha)^2 A_{m-2} + \dots (x-\alpha)^{m-1} A_1\right) \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^m} + (x-\alpha)^m \Theta(x)$$

Man setze $x - \alpha = z$ so geht die Gl. über in folgende:

$$\varphi(\alpha+z) = \left(A_m + z A_{m-1} + z^2 A_{m-2} + \dots z^{m-1} A_1\right) \frac{\psi(\alpha+z)}{z^m} + z^m \Theta(\alpha+z)$$

Man entwickle nun $\varphi(\alpha+z)$ u. $\psi(\alpha+z)$ nach der Taylor'schen Reihe, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass die Entwicklung v. $\psi(\alpha+z)$ erst mit dem Gliede anfängt, welches den m^{ten} Differenzialcoefficienten enthält:

$$\varphi(\alpha) + \frac{z}{1} \varphi'(\alpha) + \frac{z^2}{1 \cdot 2} \varphi''(\alpha) + \dots \frac{z^m}{m!} \varphi^{(m)}(\alpha) =$$

$$\left(A_m + z A_{m-1} + z^2 A_{m-2} + \dots z^{m-1} A_1\right) \frac{z^m \frac{\psi^{(m)}(\alpha)}{m!} + z^{m+1} \frac{\psi^{(m+1)}(\alpha)}{(m+1)!} + \dots}{z^m} + z^m \Theta(\alpha+z).$$

Man sieht, dass die Entwicklung v. $\psi(\alpha+z)$ nach dem Taylor'schen

Satze erst mit dem Gliede anfängt, welches $\varphi^{m}(\alpha)$ enthält, weil alle vorhergehenden Differenzialquotienten Null sind und die Function selbst mit verschwinden müssen. Die Function dann enthält auch noch $z^{m}(\Theta(\alpha+z))$. Denn wenn man ebenfalls nach dem Taylor'schen Satze $\Theta(\alpha+z)$ entwickelt, so würde die niedrigste Potenz von z die 0te sein, also enthält das betreffende Glied keine niedrigere Potenz v. z als die mte.
Wenn man nun bemerkt, daß sich im zweiten Glied der obigen Gl. durch z^{m} heben läßt, so findet man durch Vergl. der gl. Potenzen v. z folgendes System

$$f(\alpha) = A_m \frac{\varphi^{m}(\alpha)}{m!}$$

$$f'(\alpha) = A_m \frac{\varphi^{(m+1)}(\alpha)}{(m+1)!} + A_{m-1} \frac{\varphi^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

$$f''(\alpha) = A_m \frac{\varphi^{(m+2)}(\alpha)}{(m+2)!} + A_{m-1} \frac{\varphi^{(m+1)}(\alpha)}{(m+1)!} + A_{m-2} \frac{\varphi^{(m)}(\alpha)}{m!}$$

....

Zuletzt erhält man durch Vergl. der Coefficienten der m-1ten Potenz v. z auch noch den letzten Coefficient A_1, ohne daß dabei die Function Θ irgend in Gebrauch käme. — Auf dieselbe Art lassen sich auch für die Coefficienten B Systeme v. Gl. aufstellen. So erhält man

$$f(\beta) = B_n \frac{\varphi^{n}(\beta)}{n!}$$

$$f'(\beta) = B_n \frac{\varphi^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!} + B_{n-1} \frac{\varphi^{n}(\beta)}{n!}$$

etc. . . . .

Wenn f(x) reell ist und die Gl. $\varphi(x)=0$ Paare gleicher imaginären Wurzeln darbietet, so werden jedes mal 2 der Exponenten ineinander gl.; sind also α u. β 2 conjugirte Wurzeln, so wird $m=n$ u. $\alpha = p+q\sqrt{-1}$ u. $\beta = p-q\sqrt{-1}$ u. außerdem

$$A_m = P+Q\sqrt{-1}\,, \quad B_m = P-Q\sqrt{-1}$$

Vereinigt man nun die beiden einander entsprechenden Partialbrüche, so wird man haben:

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{(x-p-q\sqrt{-1})^m} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{(x-p+q\sqrt{-1})^m} = \frac{P((x-p+q\sqrt{-1})^m+(x-p-q\sqrt{-1})^m) + Q\sqrt{-1}((x-p+q\sqrt{-1})^m - (x-p-q\sqrt{-1})^m)}{((x-p)^2+q^2)^m}$$

Und man überzeugt sich leicht, daß der Zähler reell ist. Ein ähnliches Verfahren wendet man auch auf die übrigen einander entsprechenden Partialbrüche an. Allein da es erhaltenen Brüche sind für die folgenden Anwendungen meistens unbrauchbar. Wir wollen daher jeden derselben in einfache Brüche mit linearen Zählern zu entwickeln.

Es sei gegeben

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots \dots kx + l}{((x-p)^2+q^2)^m}$$

welchen Bruch man wie folgt zerlegen kann

$$= \frac{L_m x + K_m}{((x-p)^2+q^2)^m} + \frac{L_{m-1} x + K_{m-1}}{((x-p)^2+q^2)^{m-1}} + \dots \dots \frac{L_1 x + K_1}{(x-p)^2+q^2}$$

Denn bringt man die Brüche auf gleiche Benennung und läßt dann den Nenner fort, so erhält man eine Gleichung vom $(2m-1)^{ten}$ Grade, in welcher also $2m$ Coefficienten vorkommen, wovon jeder 0 sein muß, nachdem man sie geordnet hat. Die Anzahl der Coefficienten L und K, welche unbekannt sind, ist aber ebenfalls $= 2m$ und man hat demnach die nöthige Anzahl von Gleichungen, um diese zu finden. Verfährt man auf gleiche Weise mit den folgenden conjugirten Partialbrüchen und addirt hierauf alle zusammen, so wird man, wie leicht zu übersehen, folgendes Schema erhalten.

$$\frac{f(x)}{\varphi x} = \frac{H_m x + J_m}{((x-p)^2+q^2)^m} + \frac{H_{m-1} x + J_{m-1}}{((x-p)^2+q^2)^{m-1}} + \dots \dots \frac{H_1 x + J_1}{(x-p)^2+q^2}$$

$$+ \frac{L_n x + K_n}{((x-p_1)^2+q_1^2)^n} + \frac{L_{n-1} x + K_{n-1}}{((x-p_1)^2+q_1^2)} + \dots \dots \frac{L_1 x + K_1}{(x-p_1)^2+q_1^2}$$

$+ \dots \dots \dots \dots \dots$

Die Bestimmung der Coefficienten kann hier nach der Euler'schen Methode oder Differenzialrechnung geschehen.

Faßt man die bisherigen Ergebnisse zusammen, so lassen sie sich alle durch das folgende Schema darstellen, und hat den folgenden Satz

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \dots$ reelle Größen $m, n, p \dots$ ganze positive Zahlen; ferner $p\,q$, $p_1 q_1$, $p_2 q_2 \dots$ reelle Größen und $k, l \dots$ ganze positive Zahlen und

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^m \cdot (x-\beta)^n \cdot \dots \cdot ((x-p)^2+q^2)^k \cdot ((x-p_1)^2+q_1^2)^l \dots$$

und $f(x)$ eine rationale ganze Function von niedrigerem Grade als $\varphi(x)$, so kann man immer setzen:

$$\frac{f(x)}{\varphi x} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots \dots \dots \frac{A_1}{x-\alpha}$$

$$+ \frac{B_n}{(x-\beta)^n} + \frac{B_{n-1}}{(x-\beta)^{n-1}} + \dots \dots \dots \frac{B_1}{x-\beta}$$

$+ \dots \dots \dots \dots \dots$

$$+\frac{L_k x + K_k}{((x-p)^2+q^2)^k} + \frac{L_{k-1}x + K_{k-1}}{((x-p)^2+q^2)^{k-1}} + \dots \frac{L_1 x + K_1}{(x-p)^2+q^2}$$

$+ \dots\dots\dots\dots$

Es ist klar, daß alle bisher behandelten Fälle hierin enthalten sind.

Transformation der irrationalen u. transcendenten Functionen durch eine neue Veränderliche.

Man kann, wie aus folgenden Beispielen hervorgeht, irrationale u. transcendente Formen durch Einführung einer neuen Größe rational machen, wenn man zwischen der alten Variabeln u. einer neuen eine passende Relation wählt, wofür jedoch keine Regeln gegeben werden können, um so mehr, als es häufig Functionen gibt, bei welchen das ganze Verfahren nicht mehr zum Ziele führt. Es bleibt also nichts übrig, als für die gebräuchlichsten Formen das Verfahren der Transformation auszuführen.

Die einfachste irrationale Function dürfte sein: $\sqrt{ax+b}$. Sie wird einfach rational dadurch, daß man für sie die Größe z setzt, so daß man erhält:

$$\sqrt{ax+b} = z \text{ folglich } x = \frac{z^2-b}{a} \quad (\mathrm{I}.$$

Ist mit dieser Function eine rationale verbunden, z.B. hat man:

$$(mx+n)\sqrt{ax+b},$$

so wird auch diese Function mit Hülfe obiger Formel rational werden, denn man erhält:

$$(mx+n)\sqrt{ax+b} = \frac{mz^2+an-bm}{a}\cdot z = \frac{1}{a}(mz^3+(an-bm)z)$$

Es ist klar, daß die Substitution I in weit allgemeinerem Sinne anwendbar ist, nämlich auf gebrochene Functionen ausgedehnt werden kann, wenn nur keine andere Irrationalität hinzukommt, als die der $\sqrt{\ }$ aus einem linearen Ausdruck. Z.B. man habe:

$$\frac{mx+n}{px+q}\sqrt{ax+b}$$

So verwandelt sich dieser Ausdruck durch die Anwendung obiger Formel I in:

$$\frac{mz^2+an-bm}{pz^2+aq-bp}\cdot z =$$

Ebenso allgemein ist:

$$\frac{mx+\sqrt{(ax+b)^3}}{mx+\sqrt{ax+b}} = \frac{mz^2-bm+az^3}{mz^2-bm+az}$$

Mit leichter Mühe übersehen kann man, wenn $\varphi(x,\sqrt{ax+b})$ eine rationale ganze od. gebrochene Function der 2 Größen x u. $\sqrt{ax+b}$ bezeichnet, diese Function durch die einfache Substitution $x=\frac{z^2-b}{a}$ immer rational machen. Ist eine solche Function noch mit dem Differential dx multiplicirt, so ist auch wieder klar, daß auch dann noch ein rationaler Differential-Ausdruck nach z erhalten werden könne, denn man hat:

$$dx = \frac{2z}{a}\cdot dz$$

Ist z.B. gegeben: $dx\cdot\sqrt{ax+b}$, so wird dies nach z rational, zu $=\frac{2z^2}{a}\cdot dz$

Steigt der Ausdr. unter der Wurzel auf den zweiten Grad, so gibt es ebenfalls noch Methoden die Function rational zu machen. Man habe

$$y=\sqrt{(ax^2+2bx+c)}$$

Vor allem sind nun 2 Fälle zu unterscheiden, nämlich ob a positiv, oder negativ ist u. jedem dieser beiden Fälle entspricht eine andere Transformation, wenn man nur eine neue Variable zulassen will.

1. a positiv. Offenbar kann man setzen

$$y=\sqrt{a}\sqrt{x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{c}{a}}$$

Setzt man der Kürze halber $\frac{b}{a}=\beta$ u. $\frac{c}{a}=\alpha$, so wird

$$y=\sqrt{a}\sqrt{x^2+2\beta x+\alpha}$$

Wird nun $\sqrt{x^2+2\beta x+\alpha}=z-x$ gesetzt, so erfolgt hieraus

$$x=\frac{z^2-\alpha}{2(\beta+z)} \quad \text{II}.$$

und alsdann $y=\sqrt{a}\cdot\frac{z^2+2\beta z+\alpha}{2(\beta+z)}$ oder wenn man auch b restituirt

$$y=\frac{az^2+2bz+c}{2(az+b)}\sqrt{a}.$$

welcher Ausdr. offenbar rational ist.
Ist die $\sqrt{\ }$ noch mit dx multiplicirt, so wird auch

$dx\sqrt{ax^2+2bx+c}$ durch Substitution II.

rational u. man erhält:

$$\partial x = \frac{z^2+2\beta z+\alpha}{2(\beta+z)^2}\cdot \partial z \text{ also}$$

$$y.\partial x = \frac{(z^2+2\beta z+\alpha)^2}{4(\beta+z)^2}\cdot\partial z\sqrt{a} = \sqrt{a}\cdot\frac{(az^2+2bz+c)^2}{4(az+b)^3}\cdot a\cdot \partial z$$

$$y.\partial x = a^{\frac{3}{2}}\frac{(az^2+2bz+c)^2}{4(az+b)^3}\cdot\partial z$$

Hat man $\frac{1}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$, so wird dieser Ausdr. durch die Substitution II übergehen in:

$\frac{2(az+b)}{(az^2+2bz+c)\sqrt{a}}$; Ist der Bruch mit ∂x multipl., hat man also: $\frac{\partial x}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}}$, so geht er über in

$$\frac{2(az+b)}{(az^2+2bz+c)\sqrt{a}}\cdot\frac{az^2+2bz+c}{2(az+b)^2}\,\partial z = \frac{\partial z}{(b+az)\sqrt{a}}$$

Es ist leicht zu übersehen, daß durch die Substitution II jede ganze od. gebrochene rationale Function der 2 Größen x u. $\sqrt{(ax^2+2bx+c)}$ rational gemacht werden kann.

2. a negativ. Dieser Fall läßt sich nicht durch die Substitution II erledigen, wenn man nicht eine imaginäre Variable einführen will, dann setzt man den Faktor $\sqrt{-a}$ heraus so ist dieser Werth u. man erhält

$$y = \sqrt{(ax^2+2bx+c)} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-x^2-\frac{2bx}{a}-\frac{c}{a}}$$

Setzt man nun der Kürze wegen $-\frac{b}{a}=\beta$ u. $-\frac{c}{a}=\alpha$ so wird

$y=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{(-x^2+2\beta x+\alpha)}$ Daß jetzt die Substitution II nicht mehr anwendbar ist, läßt sich leicht auf folgende Art einsehen. Würde man nämlich setzen

$\sqrt{(-x^2+2\beta x+\alpha)} = z-x$ so wird

$\alpha - z^2 = 2x^2-2x(z+\beta)$ u. man hat zur Bestimmung v. x eine quadratische Gl. aus welcher x nur auf irrationale Weise durch z ausgedrückt werden könnte.

Wohl ließe sich durch die Annahme $y = z - x\sqrt{-1}$, x^2 zum Verschwinden bringen, u. x durch z auf rationale Weise erhalten, allein man abstrahiren von dieser Substitution weil sie auf die Einführung des Imaginären beruht. Bemerkt man aber, daß wenn α u. β nicht beide negativ sind, welcher Fall wir schon von vorn herein ausschließen (weil sonst y von selbst auch imaginär wäre) der Ausdr. $-x^2 + 2\beta x + \alpha$ sich immer in 2 reale lineare Functionen zerfällen läßt, so wird man leicht auf eine entsprechende Transformation geführt. Setzt man nämlich

$$-x^2 + 2\beta x + \alpha = 0$$

und entwickelt daraus x, so ergibt sich $x = \beta \pm \sqrt{\beta^2+\alpha}$ u. man kann also setzen

$$-x^2 + 2\beta x + \alpha = (x - \beta - \sqrt{\beta^2+\alpha})(-x + \beta - \sqrt{\beta^2+\alpha})$$

Bezeichnen wir der Kürze halber $\beta + \sqrt{\alpha+\beta^2}$ mit m u. $\beta - \sqrt{\alpha+\beta^2}$ mit n, so erhält man

$$y = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{(x-m)(n-x)} = (x-m)\sqrt{-a}\cdot\sqrt{\frac{n-x}{x-m}}$$

So ist klar, daß wenn man nun $\frac{n-x}{x-m} = z^2$ setzt daraus y sich rational durch z ausdrücken läßt. In der That erhält man

$$x = \frac{n+mz^2}{1+z^2} \quad \text{III.}$$

Setzt man diesen Werth v. x ein, so erhält man

$$x - m = \frac{n+mz^2}{1+z^2} - m = \frac{n-m}{1+z^2}$$

$$y = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{-x^2+2\beta x+\alpha} = \sqrt{-a}\cdot(x-m)\sqrt{\frac{n-x}{x-m}} = \frac{n-m}{1+z^2}\cdot z\sqrt{-a}$$

Da nun $n - m = -2\sqrt{\alpha+\beta^2} = -\frac{2\sqrt{b^2-ac}}{a}$, so ist:

$$\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{2\sqrt{b^2-ac}}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{z}{1+z^2}$$

Ist y noch mit dx multiplicirt, so wird $y.dx$ noch in ein rationales Differential nach z verwandelt werden können, denn man hat:

$$dx = (n-m)\frac{-2z\,dz}{(1+z^2)^2} = -2\sqrt{\alpha+\beta^2}\cdot\frac{-2z\,dz}{(1+z^2)^2} = \frac{4\sqrt{b^2-ac}}{a}\cdot\frac{z\,dz}{(1+z^2)^2}$$

Folglich ist: $dx\cdot\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{8(b^2-ac)}{a\sqrt{-a}}\cdot\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)^3}$

Ist die Function $\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ gegeben, wo a negativ ist, so erhält man nun auf der Stelle einen rationalen Ausdruck dafür, vermittelst der obigen Substitution III.

$$\frac{1}{\sqrt{(ax^2+2bx+c)}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{(b^2-4c)}}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{z}{1+z^2}} = \frac{\sqrt{-a}}{2\sqrt{b^2-4c}}\cdot\frac{1+z^2}{z}$$

Setzt man $dx : \sqrt{(ax^2+2bx+c)}$ so ist dieser Quotient

$$= \frac{\sqrt{-a}}{2(\sqrt{b^2-ac})}\cdot\frac{1+z^2}{z}\cdot\frac{4\sqrt{b^2-4c}}{-(-a)}\cdot\frac{z\cdot dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{2}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{dz}{1+z^2}$$

Es ist klar, daß auch hier jede rationale Zusammensetzung von x u. $y = \sqrt{(ax^2+2bx+c)}$ durch jene Substitution nach z rational gemacht werden kann, u. dann noch, wenn diese Verbindung mit dx multiplicirt ist. Wenn der Wurzelexponent) 2 ganz od. gebrochen ist so kann man eine Function, welche auf rationale Weise aus den Ausdrücken $\sqrt[m]{x}, \sqrt[n]{x}, \sqrt[p]{x}$ .... zusammengesetzt ist immer sehr leicht rational machen, setze nämlich n einer Zahl, welche durch m, n, p ... ohne Rest theilbar ist. Man setze dann $\sqrt[n]{x} = z$ also $x = z^n$ so werden

$$\sqrt[m]{x} = z^{\frac{m}{n}}, \quad \sqrt[m]{x} = z^{\frac{n}{m}} \quad \sqrt[p]{x} = z^{\frac{n}{p}} \quad \ldots\ldots$$

wo die Exponenten von z ganze Zahlen sind, also wird eine rationale Function

$\varphi(\sqrt[n]{x}, \sqrt[m]{x} \ldots)$ nach z rational, u. offenbar auch dann noch, wenn dieselbe mit dx multipl. ist. Hat man z. B. die Function

$$\frac{\sqrt{x}+3x^5\sqrt[5]{x}}{1-2\sqrt[3]{x}-\sqrt[7]{x^2}}$$

, so muß man $n = 210$ setzen, so wird die Substitution $x = z^{210}$ den Ausdruck rational machen, sie geht nämlich über in

$$\frac{z^{105}+3z^{1050}\cdot z^{42}}{1-2z^{70}\cdot z^{60}} = \frac{z^{105}+3z^{1092}}{1-2z^{130}}$$

Wird statt gebrochenen Potenzen von x solche, von einem linearen Ausdruck $ax+b$ gegeben, so wird die Substitution $ax+b = z^n$ die Function auf rationale Form bringen, so daß also eine irrationale Function

$\varphi(\sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[n]{ax+b}, \ldots)$ auch noch, wenn sie mit dx multiplicirt ist, auf eine rationale Form bringen läßt. Enthält aber gleich die Function die Quadratw. $\sqrt{ax+b}$ u. $\sqrt{a_1x+b_1}$, so werden zwei Substitutionen nöthig. Denn setzt man $\sqrt{ax+b} = z$, so erhält man $x = \frac{z^2-b}{a}$, und in die und im Wurzel substituirt erhält man

$$\sqrt{ax_1+b_1} = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a}\cdot z^2 + \frac{ab_1-a_1b}{a}\right)} = \sqrt{\frac{a_1}{a}}\cdot\sqrt{z^2+\frac{ab_1-a_1b}{a_1}}$$

$$= \sqrt{-\frac{a_1}{a}}\,\sqrt{-z^2+\frac{a_1b-ab_1}{a_1}}$$

Und man sieht, daß je nachdem a positiv oder negativ ist die eine, oder die andere Substitution in Anwendung zu bringen ist, welche für die $\sqrt{}$ aus einem quadratischen Ausdruck angegeben wurde. Man habe z. B.

$$\frac{dx\sqrt{1+x}}{x(1+\sqrt{(1+x)})+\sqrt{1-x}}$$

Man setze $\sqrt{1+x}=z$ folglich $x=z^2-1$, durch welche Substitution der Ausdruck die rationale Form

$$\frac{2z^2\cdot dz}{(z^2-1)(z+1)+\sqrt{1-z^2}}$$ erhält

Da jedoch immer noch etwas Irrationales vorkommt, nämlich

$$\sqrt{-z^2+2}$$

so muß nun noch eine Substitution vorgenommen werden. Es ist:

$$\sqrt{-z^2+2} = \sqrt{(\sqrt{2}-z)(\sqrt{2}+z)} = (z+\sqrt{2})\sqrt{\frac{\sqrt{2}-z}{z+\sqrt{2}}}$$

Man setze nun $\frac{\sqrt{2}-z}{z+\sqrt{2}}=t^2$, woraus $z=\frac{(1-t^2)\sqrt{2}}{t^2+1}$

Substituirt man jetzt diesen Werth v. z in die obige einmal transformirte Function, so erhält man

$$\frac{dx\sqrt{1+x}}{x(1+\sqrt{1+x})+\sqrt{1-x}} = -\frac{16t(1-t^2)^2\sqrt{2}\cdot dt}{(t^4-6t^2+1)((1-t^2)\sqrt{2}+1+t^2)(1+t^2)+2t\sqrt{2}(1+t^2)^3}$$

Uebersteigt der Wurzelexponent die Zahl 2 und der Ausdruck unter der Wurzel den 2ten Grad, so läßt sich im Allgemeinen eine aus einer solchen Wurzelgröße zusammengesetzte Function nicht mehr in rationale Form bringen. Jedoch gibt es einige häufiger vorkommende Fälle von denen die wichtigsten hier angeführt werden mögen, welche sich nach einer neuen Variabeln dann rational machen lassen, wenn sie noch mit dx multipl. ist

1. Man habe $C(\sqrt[m]{ax^n+b})\,\frac{dx}{x}$, wenn C die Characteristik einer rationalen Function ist, in welcher sonst x nicht mehr vorkommt. Man setze $\sqrt[m]{(ax^n+b)}=z$ (A) so ist daher $x^n=\frac{z^m-b}{a}$ Logarithmirt man diese letztere Gl. so erfolgt:

$$n\,lx = l(z^m-b)-la$$ und differenziirt man nach x u. z so erhält man: $n\frac{dx}{x}=\frac{mz^{m-1}\cdot dz}{z^m-b}$, od: $\frac{dx}{x}=\frac{mz^{m-1}\cdot dz}{n(z^m-b)}$

Der gegebene Differenzialausdr. geht also über in
$\varphi(z)\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{z^{m-1}dz}{z^m-b}$, was augenblicklich rational ist.

Man habe:

$$\sqrt[3]{x^4-1}\cdot\frac{dx}{x}$$

Setzt man $\sqrt[3]{x^4+1}=z$, so erhält man $x^4=z^3-1$. Diese letztere Gleichung logarithm. differenziert ergibt sich:

$$4lx = l(z^3-1)$$

$$4\frac{dx}{x}=\frac{3z^2}{z^3-1}\cdot dz \qquad \frac{dx}{x}=\frac{3z^2dz}{4(z^3-1)}$$

Die Funktion geht nun über in:

$$\frac{3z^3dz}{4(z^3-1)}$$

2. Man soll die Fct. $\varphi\left(\sqrt{\frac{ax^2+b}{a_1x^2+b_1}}\right)\cdot\frac{dx}{x}$ rational machen

Man setze $\frac{ax^2+b}{a_1x^2+b_1}=z^2$, so erhält man $x^2=\frac{b_1z^2-b}{a-a_1z^2}$ (B)

Differenziert man diese Gl. logarithmisch, so erhält man:

$$2lx = l(b_1z^2-b) - l(a-a_1z^2)$$

$$2\frac{dx}{x}=\frac{2b_1z\cdot dz}{b_1z^2-b}+\frac{2a_1z\,dz}{a-a_1z^2}$$

Der gegebene Differenzialausdruck nimmt nun folgende Form an:

$\varphi(z)\cdot\left(\frac{a_1z}{a-a_1z^2}+\frac{b_1z}{b_1z^2-b}\right)dz$, welche wieder rational ist

3. Man soll die Funktion $\varphi\left(\sqrt[m]{\frac{ax^n+b}{a_1x^n+b_1}}\right)\cdot\frac{dx}{x}$ rational machen.

Setzt man $\frac{ax^n+b}{a_1x^n+b_1}=z^m$ so folgt daraus

$$x^n=\frac{b_1z^m-b}{a-a_1z^m} \quad (C)$$

Wird diese Gleichung logarithmisch differenziert so folgt $nlx = l(b_1z^m-b)-l(a-a_1z^m)$

$$n\frac{dx}{x}=\frac{mb_1z^{m-1}dz}{b_1z^m-b}+\frac{ma_1z^{m-1}dz}{a-a_1z^m}$$

die Fct geht alsdann über in:

$\varphi(z)\cdot\frac{m}{n}\cdot z^{m-1}\left(\frac{a_1}{a-a_1z^m}+\frac{b_1}{b_1z^m-b}\right)dz$ und ist in dieser Form wieder rational.

Von den transcendenten Funktionen, bei welchen allgem. Regeln für die rationale Transformation ebenfalls nicht existiren, wollen wir nur die folgenden, häufiger vorkommenden Fälle betrachten: nämlich diejenigen, in welchen die trigonometrischen Funktionen in einer rationalen Art auf eine rationale Weise eingehen. Um eine solche Funktion zu transformiren, genügt es eine Bemerkung aus der Goniometrie hervorzuheben. Diese besteht darin, daß sich jede trigon. Funktion eines Bogens durch die Tangente desselben Bogens rational darstellen läßt. Es ist bekanntlich

$$\sin\alpha = \frac{2\,tg\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}\ ;\quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}\ ;\quad tg\,\alpha = \frac{2\,tg\frac{1}{2}\alpha}{1-tg^2\frac{1}{2}\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}{2\,tg\frac{1}{2}\alpha}\ ;\quad \sec = \frac{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}{1-tg^2\frac{1}{2}\alpha}\ ;\quad ctg\,\alpha = \frac{1-tg^2\frac{1}{2}\alpha}{2\,tg\frac{1}{2}\alpha}$$

Auch ist das Differenziale von α durch das Differenziale der Tangente von $\frac{1}{2}\alpha$ rational darstellbar, nämlich

$$\partial\alpha = \frac{2\,\partial\,tg\frac{1}{2}\alpha}{1+tg^2\frac{1}{2}\alpha}$$

Ein Beispiel wird hier die Anwendung dieser Formel zeigen. Man habe den Ausdruck

$$\frac{a+b\cos x}{m+n\sin x}\cdot\partial x$$

, so setze man $tg\frac{1}{2}x = z$, wodurch alsdann der gegebene Ausdruck übergeht in den folgenden:

$$\frac{a+b\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}}{m+n\cdot\frac{2z}{1+z^2}}\cdot\frac{2\partial z}{1+z^2} = \frac{z^2(a-b)+a+b}{mz^2+2nz+m}\cdot\frac{2\partial z}{1+z^2}$$

In manchen Fällen ist es einfacher statt $tg\frac{1}{2}x$, eine der trigonom. Fctionen $= z$ zu setzen, welche in dem gegebenen Differenzialausdruck vorkommen. Hat man z. B. $\sin x.\partial x\cdot\mathfrak{F}(\cos x)$, wo $\mathfrak{F}$ wie früher die Characteristik einer rationalen Funktion bedeutet, so setze man $\cos x = z$, dann ist $\partial x = -\frac{\partial z}{\sin x}$. Setzt man diesen Werth in den gegebenen Ausdruck, so erhält man $-\sin x\cdot\frac{\partial z}{\sin x}\,\mathfrak{F}(z)$ od: $-\mathfrak{F}(z)\cdot\partial z$

Z. B. ist z. B. $\sin x\cdot\frac{\partial x}{a+b\cos x} = -\frac{\partial z}{a+bz}$. Hat man

$\cos x.\partial x\cdot\mathfrak{F}(\sin x)$, so erhält man, wenn man $\sin x = z$ setzt

$dx = \frac{dz}{\cos x}$ folglich wird der gegebene Ausdruck zu: $dz \cdot \varphi(z)$

Ebenso ist $\cos x \cdot dx \, \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = dz \, \frac{1+z}{1-z}$

Kommen in dem gegebenen Ausdruck Exponentialfunktionen vor, so können diese wird in einigen Fällen in rationale Form gebracht werden, wovon die gewöhnlichsten angeführt werden sollen. Hat man z. B.

$\varphi(e^x) \cdot e^x \cdot dx$, so setze man $e^x = z$.

Differenziert man dies, so erhält man $e^x \cdot dx = dz$ und dies in die obige Funktion eingesetzt:

$\varphi(z) \cdot dz$ Beisp.:

$$\frac{e^x \cdot dx}{1+e^x} = \frac{dz}{1+z^2}$$ hat man.

$\varphi(e^u) \cdot e^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$ wo u selbst wieder eine Funktion v. x ist, so setze man $e^u = z$ u. differenziert

$$e^u \frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

Substituiert man dies in den gegebenen Differenzialausdruck, so erhält man:

$$\varphi(z) \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx = \varphi(z) \, dz$$

Z. B. habe man

$$\frac{2x \cdot e^{x^2} \cdot dx}{1+e^{x^2}}$$ Man setze $e^{x^2} = z$, so ist, wenn man differenziert

$2x \cdot dx \, e^{x^2} = dz$ u. dies eingesetzt gibt

$\frac{dz}{1+z}$. Enthält der gegebene Differenzialausdruck den Logarithmus v. x in rationaler Weise, so kann er immer nach z rational gemacht werden, wenn noch der Faktor $\frac{dx}{x}$ mit vorkommt. Hat man nämlich

$\varphi l(x) \frac{dx}{x}$, so setze man $lx = z$

Differenziert man dies, so erhält man $\frac{dx}{x} = dz$ u. dies eingesetzt: $\varphi(z) \cdot dz$.

Beisp. $\frac{1}{lx} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$ oder $\frac{1+(lx)^2}{1-(lx)^2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1+z^2}{1-z^2} \cdot dz$

Ist nur rationale Fktn v. arc sin x, arc cos x, arc tg x gegeben, so kann nach z im Allgemeinen nur dann auf rationale Form gebracht werden, wenn sie noch multiplicirt ist mit resp.:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{\partial x}{1+x^2}$$ Hat man nämlich

$\varphi(\text{arc}\sin x)\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$, so setze man arc sin $x = z$. Differenzirt man dies:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \partial z$$ u. setzt ein, so erhält man: $\varphi(z)\,\partial z$

Dies ist $(\text{arc}\sin x)^n\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = z^n\,\partial z$. Hat man

$$\varphi(\text{arc}\cos x)\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$, so setze man arc cos $x = z$.

Dies differenzirt u. alsdann eingesetzt, erhält man

$$-\varphi(z)\cdot\partial z$$

Hat man schließlich: $\varphi(\text{arc}\,tg\,x)\cdot\frac{\partial x}{1+x^2}$, so setze man arc tg $x = z$, alsdann hat man:

$$\frac{\partial x}{1+x^2} = \partial z$$, wodurch der Ausdruck in den folgenden übergeht $\varphi(z)\,\partial z$. Dies ist

$$\frac{(1+(\text{arc}\,tg\,x)^2)\,\partial x}{1+x^2} = (1+z^2)\cdot\partial z.$$

Häufig erlangt man eine zweckmäßige Vereinfachung, wenn man eine algebraische Fkt. in trigon. Form bringt. Man hab. z.B. d. Fkt. ax^n+b, so können die 2 Fälle vorkommen, daß a u. b gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Im ersten Fall schreibe man den gegebenen Ausdruck, wie folgt

$$ax^n+b = b\left(1+\frac{a}{b}x\right)$$ u. setze darin $\frac{ax}{b} = tg^2\varphi$

wodurch er übergeht in. $b\sec^2\varphi$

Haben a u. b ungleiche Zeichen u. es ist $\frac{a}{b}x < 1$, so setze man diesen Quotienten $= -\cos^2\varphi$; man erhält alsdann

$$b\left(1+\frac{a}{b}x\right) = b(1-\cos^2\varphi) = b\sin^2\varphi$$

Ist jedoch: $\frac{ax}{b} > 1$, so sei der Quotient $= -\sec^2\varphi$

so ist nun $b\left(1+\frac{a}{b}x\right) = -b(\sec^2\varphi-1) = -b\,tg^2\varphi$

Hat man daher den gegebenen Differenzialausdruck $\frac{\partial x}{x(1+4x^2)}$, so setze man darin $4x^2 = tg^2\varphi$

od. $2x = tg\,\varphi$ u. es ist $2\,\partial x = \partial\,tg\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\cos^2\varphi} = \partial\varphi\sec^2\varphi$

d. gegeb. Fkt geht über in $\frac{\frac{1}{2}\partial\varphi\sec^2\varphi}{\frac{1}{2}tg\,\varphi\sec^2\varphi} = \frac{\partial\varphi}{tg\,\varphi}$.

Oder man hat

$\frac{\partial x}{x(1-4x^2)}$, (wo $4x^2 < 1$ sein), so setze man $4x^2 = \cos^2\varphi$ oder $2x = \cos\varphi$ u. folglich

$2\partial x = -\partial\varphi\sin\varphi$, wodurch der Ausdruck übergeht in

$$\frac{-\frac{1}{2}\partial\varphi\sin\varphi}{\frac{1}{2}\cos\varphi\sin^2\varphi} = -\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = -\frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi}$$

Ist dieselbe Fct gegeben und ist aber darin $4x^2 > 1$, so setze $4x^2 = \sec^2\varphi$ od. $2x = \sec\varphi$, woraus sich $\partial x = \frac{1}{2}\partial\varphi \cdot tg\varphi \cdot \sec\varphi$ ergibt; setzt man dieses ein, so erhält man für den gegebenen Ausdruck

$$-\frac{\frac{1}{2} tg\varphi \cdot \sec\varphi \cdot \partial\varphi}{\frac{1}{2}\sec\varphi\, tg^2\varphi} = -\frac{\partial\varphi}{tg\varphi}$$

Man kann dieses Verfahren oft auch mit Vortheil auf irrationale Differenzialausdr. anwenden. Man habe z.B. die Fct.

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}}$$

Setzt man darin $x = \sin\varphi$, so ist $\partial x = \partial\varphi\cos\varphi$ und der gegebene Ausdruck nimmt folgende Form an

$$\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

hat man zweitens

$\frac{\partial x}{x\sqrt{1-x^2}}$, so ist, wenn man x wieder $= \sin\varphi$ gesetzt wird $\partial x = \partial\varphi\cos\varphi$ u. man erhält für die Function

$$\frac{\cos\varphi \cdot \partial\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi}$$

Ist endlich gegeben $\frac{\partial x}{x\sqrt{1+x^2}}$

so setze man $x = tg\varphi$, wodurch man erhält $\partial x = \partial\varphi\sec^2\varphi$ u. für den Differenzial-Ausdruck.

$$\frac{\partial\varphi \cdot \sec^2\varphi}{tg\varphi \cdot \sec\varphi} = \frac{\partial\varphi\sec\varphi}{tg\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi}$$

Integral-Rechnung

Es ist Aufgabe der Differenzialrechnung aus einer gegebenen Funktion $F(x)$ diejenige neue Funktion $F'(x)$ od. $\frac{dF_x}{dx}$ zu finden, welche zum Vorschein kömmt, wenn man in der Reihe

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

, h in's unendlich kleine abnehmen läßt, oder, was dasselbe sagt, wenn man die Grenzen dieser Reihe für $h=0$ werdend bestimmt. so daß man hat

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f_x}{h} = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Die Integralrechnung dagegen hat die umgekehrte Aufgabe, welche darin besteht, zu einer gegebenen Funktion diejenige neue zu finden, welche differenzirt die gegebene liefert. Sofern stellt also die Integralrechnung das Umgekehrte der Differenzialrechnung u. man kann durch Umkehrung der Formeln der Differenzialrechnung ebensoviele der Integralrechnung erhalten. Wenn zu einer Fct. $f(x)$ das Integral gefunden werden soll, so heißt dies umkehren die Fct integriren. Man bezeichnet solches nach Leibnitz mit

$$\int f(x) \cdot dx$$

Ist nun F_x das Integral, so haben wir: $\int f(x)dx = F(x)$
und der Definition zufolge muß daher
$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ sein. $F(x)$ ist jedoch nicht die allgemeinste Fct, welche der Aufgabe genügt, sondern $F(x) + \text{Constante}$ ist ebenfalls von der Beschaffenheit daß ihr Differenzial-quotient $= f(x)$ ist. Man kann also zu jedem Int. $f(x)$ noch eine beliebige Constante hinzufügen.

Die Aufgaben der Differenzialrechnung sind unter allen Umständen lösbar, u. man kann jede gegebene Fct differenziren. Nicht so aber sollte sich mit der Integralrechnung, denn, wenn jede Funktion einen Differenzialquotienten hat, so entsteht doch hier sie der gegebenen Funktion eine primitive endliche Form, durch deren Differenziation die gegebene erhalten werden könnte.

Grundformeln der Integralrechnung

Man versteht unter diesen einige wenige Formeln, auf welche man am Ende aller Reduktionen geführt wird u. welche sich nicht erledigen lassen, ohne die Rückkehr der entsprechenden Differenzial Formeln.

1. Integration der Potenzen. — Bemerkt man, daß:

$$\frac{d\,\varphi(x)^n}{dx} = n\,\varphi(x)^{n-1}\cdot\varphi'(x)$$ ist, so folgt:

$$\int \varphi(x)^{n-1}\varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi(x)^n}{n} + C \qquad \text{I.}$$

Wenn die Potenz einer Fct multipl. ~~mit~~ mit dem Differenzialquotienten ihrer Basis, integrirt werden soll, so erhält man das Integral, indem man den Exponenten um eine Einheit vermehrt u. durch den vermehrten Exponenten dividirt. z.B. es sei:

$\varphi(x) = x$ so ist $\varphi'(x) = 1$ u. man erhält dann

$\int x^{n-1}dx = \frac{x^n}{n} + Const.$ od. n für $n-1$ gesetzt:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Oder es sei $\varphi(x) = lx$ so ist $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ und

$$\int (lx)^n \frac{dx}{x} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C$$

Ebenso erhält man für $\varphi(x) = \sin(kx)$ u. $\varphi'(x) = k\cos(kx)$

$$\int (\sin(kx))^n\cdot\cos(kx)\,dx = \frac{(\sin(kx))^{n+1}}{k(n+1)} + C$$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int f(x)^{-\frac{1}{2}}\, f'(x)\,dx = 2\sqrt{f(x)} + C$, darin

$f(x) = x$ gesetzt erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \cdot dx = -\int -\sin x (\cos x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2\sqrt{\cos x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{lx}} = \int \frac{dx}{x} \cdot (lx)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{lx} + C$$

$$\int f'(x) \cdot \sqrt{f(x)} \cdot dx = \frac{2}{3}\sqrt{(f(x))^3} = \frac{2}{3} f(x)\sqrt{fx} + C$$

$$\int \cos x \sqrt{\sin x} \cdot dx = \frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} + C$$

$$\int (ax+b)^m \cdot dx = \frac{1}{a}\int a(ax+b)^m \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + C$$

$$\int (ax^p+b)^m \cdot x^{p-1} \cdot dx = \frac{1}{ap} \cdot \frac{(ax^p+b)^{m+1}}{m+1} + C$$

Unsere Grundformel I wird nur in einem Fall illusorisch, nämlich wenn $n=0$ ist; es lässt sich jedoch in diesem Fall der wahre Werth des Integrals leicht ermitteln, und zwar auf zweierlei Weise, nämlich einmal, indem man sich erinnert, dass die Differentialrechnung gibt

$$\frac{d\,l(\varphi x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi x}$$ und dass also

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot dx = l\varphi(x) + C$$ ist, welches Integral mit dem der Grundformel übereinstimmt wenn man $n=0$ setzt.

Auf andere Weise lässt sich dieses Resultat erreichen, wenn man die willkürliche Constante der Grundformel in Anspruch nimmt. Man denke sich dieselbe zusammengesetzt aus $-\frac{1}{n} + C$, so geht die rechte Seite der Formel über in $$\frac{\varphi x^n - 1}{n} + C$$

und man sieht nun dass für $n=0$ dieser Bruch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Der wahre Werth desselben lässt sich aber auf folgende Art ermitteln. Bekanntlich hat man die Formel

$$a^n = 1 + n\,la + \frac{(n\,la)^2}{1.2} + \frac{(n\,la)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Daraus folgt: $$\frac{a^n - 1}{n} = la + \frac{n(la)^2}{1.2} + \frac{n^2(la)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Lässt man nun n ohne Ende abnehmen, so nähert sich der Quotient links ohne Ende der Grenze $l(a)$, so dass man hat:

$$\lim_{n=0} \frac{a^n - 1}{n} = la.$$ Setzt man $a = \varphi(x)$, so wird

$$\lim_{n=0} \frac{\varphi(x)^n - 1}{n} = l\,\varphi(x)$$

Will man zur Bestimmung des Bruches die Differenzialrechnung anwenden, so ist es nöthig folgenden Satz voranzuschicken: Es seien $f(z)$ u. $F(z)$ zwei Functionen, welche für denselben Werth $z=\alpha$ zu 0 werden, so wird der Quotient, so wird der Quotient $\frac{f(z)}{F(z)}$ für $z=\alpha$ zu $\frac{0}{0}$. Um jedoch den wahren Werth desselben zu erhalten wollen wir nicht genau $z=\alpha$, sondern einen Werth für z setzen welcher sehr nahe an α liegt. Es sei dieser Werth $(\alpha+h)$, so ist:

$$\frac{f(z)}{F(z)} = \frac{f(\alpha+h)}{F(\alpha+h)}$$

, oder wenn man die Taylorsche Entwicklung anwendet

$$= \frac{f(\alpha) + h f'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2} f''(\alpha) + \ldots}{F(\alpha) + h F'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2} F''(\alpha) + \ldots}$$

Da nun $f(\alpha) = F(\alpha) = 0$ ist, so kann man den Bruch in Zähler und Nenner mit h dividiren und man erhält dann:

$$= \frac{f'(\alpha) + \frac{h}{1.2} f''(\alpha) + \ldots}{F'(\alpha) + \frac{h}{1.2} F''(\alpha) + \ldots}$$

oder wenn man jetzt h immer abnehmen läßt, so geht der Bruch über in $\frac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)}$ und dieses ist der wahre Werth unseres Bruches. Daraus erhält man daher folgenden Satz: Wenn der Bruch $\frac{f(z)}{F(z)}$ für einen bestimmten Werth $z=\alpha$, die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so differenzirt man den Zähler u. den Nenner jeden für sich u. setzt alsdann $z=\alpha$, so drückt $\frac{f'(\alpha)}{F'(\alpha)}$ den wahren Werth des Bruches aus. Nach dieser Regel wollen wir nun den Bruch $\frac{\varphi(x)^n - 1}{n}$ behandeln. Differenzirt man den Zähler nach n so erhält man $\frac{d(\varphi(x)^n - 1)}{dn} = \varphi(x)^n \cdot l\,\varphi(x)$ und wenn man den Nenner differenzirt, so erhält man 1, folglich ist der wahre Werth des Bruches

$$= \varphi(x)^n\, l\,\varphi(x)$$

u. für $n=0$ $= l\,\varphi(x)$.

Wir sehen daher die 2te Grundformel.

II $$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot dx = l\,\varphi(x) + C = l\,\varphi x + l\,C = l(C \cdot \varphi(x))$$

Man habe z. B. $\varphi(x)=x$, so ist $\varphi'(x)=1$ und

$$\int\frac{dx}{x}=l(x)+C=l(x.C)$$

Da das Integral für alle Werthe v. x reell bleibt, so muss es auch sein Ausdruck $l(x)$ sein, was aber scheinbar nicht der Fall ist, für ein negatives x. Man kann jedoch diesem Umstande begegnen, wenn man statt $l(x)$, $\frac{1}{2}l\,x^2$ setzt, in welcher Form man das Resultat häufig geschrieben findet.

Beispiele:

$$\int ctg\,x.dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}.dx=l\sin x$$

$$\int tg\,x.dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}.dx=-l\cos x$$

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{a\,dx}{ax+b}=\frac{1}{a}l(ax+b)=l\sqrt[a]{ax+b}+C$$

$$\int\frac{e^x}{a+be^x}.dx=\frac{1}{b}l(a+be^x)+C$$

Bekanntlich ist

$$\frac{d\,arc\,tg\,\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\text{, folglich ist}$$

$$\int\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}.dx=arc\,tg\,\varphi(x)+C\quad(\text{III.})$$

Setzt man $\varphi(x)=x$ so erhält man

$$\int\frac{1}{1+x^2}.dx=arc\,tg\,x+C$$

Beispiele. $\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.dx=arc\,tg\sin x$ (No 106)

$$\int\frac{dx}{x(1+(lx)^2)}=arc\,tg\,l\,x\qquad(\text{No }107)$$

$$\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=arc\,tg\,e^x\qquad(\text{No }108)$$

$$\int\frac{x+a}{(1+x^2+2ax)\sqrt{x^2+2ax}}.dx=\int\frac{\frac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax}}}{1+\sqrt{(x^2+2ax)}^2}.dx=arc\,tg\sqrt{x^2+2ax}+C\quad(109)$$

$$\int\frac{(1+2\sin x)\,dx}{1+x^2-4x\cos x+4\cos^2x}=\int\frac{d(x-2\cos x)}{1+(x-2\cos x)^2}=arc\,tg(x-2\cos x)\quad(110)$$

Es ist aus der Differentialrechnung bekannt, dass

$$\frac{d.\,arc\sin\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}$$

ist, geht man zu [illegible] über so folgt.

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}.dx=arc\sin\varphi(x)+C.\ \text{IV}$$

Setzt man in dieser Formel $\varphi(x) = x$ so hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

Ist $\varphi x = lx$, so wird:

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{1-(lx)^2}} = \arcsin lx + C$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-(\arcsin x)^2)}} = \arcsin(\arcsin x) + C$$

Aus der Formel $\frac{\partial . e^{\varphi(x)}}{\partial x} = e^{\varphi(x)} . \varphi'(x)$ folgt durch Integration

$$\int e^{\varphi(x)} . \varphi'(x) . \partial x = e^{\varphi(x)} + C \quad (\mathbf{V}.$$

für $\varphi(x) = x$ wird

$$\int e^{x} \partial x = e^{x} + C \quad (12)$$

Beispiele: $\int e^{\sin x} . \cos x . \partial x = e^{\sin x} + C$

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} . \frac{\partial x}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x} + C$$

$$\int e^{-x^2} . x . \partial x = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} . -2x . \partial x = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Es ist $\frac{\partial \sin \varphi(x)}{\partial x} = \cos \varphi(x) . \varphi'(x)$ u. daher, wenn integrirt wird $\int \cos \varphi(x) . \varphi'(x) . \partial x = \sin \varphi(x) + C$ (**VI**.

$\varphi(x) = x$ gesetzt gibt

$$\int \cos x . \partial x = \sin x + C$$

$$\int x . \cos(x)^2 . \partial x = \frac{\sin(x)^2}{2} + C$$

Bekanntlich hat man $\frac{\partial \cos \varphi(x)}{\partial x} = -\sin \varphi(x) . \varphi'(x)$ durch die umgekehrte Operation erhält man

$$\int \sin \varphi(x) \varphi'(x) . \partial x = -\cos \varphi(x) + C \quad (\mathbf{VII}.)$$

$\varphi(x) = x$ gesetzt gibt.

$$\int \sin x \, \partial x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} . \partial x = -2\cos\sqrt{x} + C$$

$$\int \sin(ax+b)\partial x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

Da $\frac{\partial \operatorname{tg} \varphi(x)}{\partial x} = \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} = \sec^2 \varphi(x) . \varphi'(x) = \varphi'(x)(1+\operatorname{tg}^2 \varphi(x))$

so ist auch $\int \varphi'(x)(1+\operatorname{tg}^2 \varphi(x))\partial x = \operatorname{tg} \varphi(x) + C$ (**VIII**)

Da endlich $\frac{\partial \operatorname{ctg} \varphi(x)}{\partial x} = -\frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} = -\varphi'(x)(1+\operatorname{ctg}^2 \varphi(x))$, so

Auch durch Umkehrung des Verfahrens

$$\int \varphi'(x)\left(1+\cot g^2\varphi(x)\right)dx = -\cot g\,\varphi(x) + C \quad (\mathrm{IX.})$$

Diese 9 Formeln umfassen alle Ergebnisse, welche man der Differenzial-Rechnung entnehmen muß. Sie sind sehr einfach. Jedoch selten ist ein gegebenes Integral von dieser Einfachheit, meistens muß man die unmittelbar gegebene Form erst durch eine Reihe von Verwandlungen auf diese Grundformeln zurückführen. Für solche Zurückführungen aber, ~~folgerung auf ihre Anzahl ist~~, gibt es einige wenige allgemeine Sätze, die folgerung auf ihre Anzahl ist, die aber von der größten Wichtigkeit für die Folge sind.

Diese Sätze sind die folgenden vier:

1. Das Integral einer algebraischen Summe von Fct. ist gleich der algebr. Summe der Integrale der einzelnen Functionen. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich, wie alle diese Sätze aus der Differenzial-Rechnung, und es ist nur nöthig denselben für die Summe oder Differenz zweier Functionen $\varphi(x)$ u. $\psi(x)$ nachzuweisen, weil es sich dann leicht auf eine beliebige Anzahl von Functionen ausdehnen läßt.

Es sei $\Phi(x) \pm \Psi(x) = F(x)$, sodann

$F'(x) = f(x)$ also: $\int f(x)\,dx = F(x)$

$\Phi'(x) = \varphi(x) \ldots \int \varphi(x)\,dx = \cancel{\Phi(x)}\ \Phi(x)$

$\Psi'(x) = \psi(x) \quad \int \psi(x)\,dx = \Psi(x)$ da nun auch

$\varphi(x) \pm \psi(x) = f(x)$ so ist:

$\int f(x)\,dx = \int(\varphi(x) \pm \psi(x))\,dx + C$, ferner

$F(x) = \int f(x)\,dx = \Phi \pm \Psi(x) = \int\varphi(x)\,dx \pm \int\psi(x)\,dx$ und daher

$$\int(\varphi(x) \pm \psi(x))\,dx = \int\varphi(x)\,dx \pm \int\psi(x)\,dx$$

Dieser Satz ergibt sich auch alsogleich daraus, daß die erste Seite nach x differenziirt übergeht in

$d\int\varphi(x)\,dx \pm d\int\psi(x)\,dx$, was der Definition zufolge nichts anderes ist als $\varphi(x) \pm \psi(x)$, so daß man also ~~bl~~ die Function unter dem Integralzeichen wieder erhält.

Man bezeichne durch $u, v, w \ldots$ beliebige Functionen v. x, ist die Erweiterung des Satzes:

$$\int(u+v-w+\dots)dx = \int u\,dx + \int v\,dx - \int w\,dx \pm \dots$$

36. Es sei zu finden das Integral der Reihe:

$\frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots\dots x^{n-1}$, wo n eine ganze positive Zahl ist. Man hat:

$$\int\frac{1-x^n}{1-x}\cdot dx = \int 1\cdot dx + \int x\,dx + \int x^2 dx + \dots + \int x^{n-1}dx$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\dots \frac{x^n}{n} + C$$

$$\int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx = \int\frac{dx}{x} - \int x\,dx = \log x - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int(ax^m+bx^n-cx^p)dx = \int ax^m dx + \int bx^n dx - \int cx^p dx =$$
$$= \frac{a\,x^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} - \frac{cx^{p+1}}{p+1} + C$$

$$\int\left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3} - 6x\right)dx = \int\frac{3}{x}dx - \int\frac{5}{x^2}dx + \int\frac{dx}{x^3} - \int 6x\,dx$$
$$= 3\,lx + \frac{5}{x} - \frac{1}{2x^2} - 3x^2$$

$$\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + lx - \frac{1}{2x^2}$$

$$\int(a\cos(\alpha x) + b\sin(\beta x))dx = \frac{a\sin(\alpha x)}{\alpha} - \frac{b\cos(\beta x)}{\beta} + C$$

$$\int\left(3x\sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt{x}} + 5e^{2x+3}\right)dx = \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{5}{2}e^{2x+3} + C$$

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt{(1-x^2)}} - x(1-x^2)^{\frac{5}{3}}\right)dx = 3\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{\frac{5}{3}}dx$$
$$= 3\arcsin x + \frac{3}{16}(1-x^2)^2\sqrt[3]{(1-x^2)^2}.$$

2. Für das Integral eines Produkts von Funktionen gibt es einen höchst wichtigen Satz, auf dem die sog. Methode der partiellen Integration beruht. Es ergibt sich ganz einfach auf folgende Weise. Es seien u und v irgend zwei Funktionen, differentiiert man ihr Produkt, so erhält man:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$ und umgekehrt integriert

folgt auch $uv = \int u\,dv + \int v\,du$, oder

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (A), durch welche Gl. eine Vertauschung der Faktoren bewirkt ist. Setzt man $u = \varphi(x)$, $dv = \psi(x)\cdot dx$, also $du = \varphi'(x)dx$ und $v = \int\psi(x)dx$ darin ein, so ergibt sich die neue Gl.

$$A_1\quad \int\varphi(x)\cdot\psi(x)dx = \varphi(x)\int\psi(x)dx - \int\varphi'(x)dx\int\psi(x)dx.$$

welche Gleichung scheinbar die Zurückführung eines Einfachen auf einen Zusammengesetzteren ist, weil das 2. Glied zwei successiven Integrationen erfordert. Häufig aber läßt sich die Function $\psi(x)$ so wählen, daß ihr Integral unmittelbar angegeben werden kann, wie in der Folge die Beispiele lehren werden.

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dv}_{dv} = -x\cos x - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = e^x(x-1)$$

$$\int \underset{u}{lx} \cdot \underset{dv}{dx} = x\,lx - \int x\,\frac{dx}{x} = x(lx-1) + C$$

$$\int \underbrace{x\, \underset{u}{lx}\, dx}_{dv} = \int \underset{u}{lx} \cdot \underset{dv}{x\,dx} = \frac{x^2}{2}lx - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\left(lx - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(lx - l\sqrt{e}\right) = \frac{x^2}{2}\, l\frac{x}{\sqrt{e}} + C$$

$$\underset{\varphi(x) = \arcsin x \quad \psi(x) = 1}{\int \arcsin x\, dx} = \arcsin x \int 1\, dx - \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int 1\, dx$$

$$= x \arcsin x + \int \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot dx = x \arcsin x + l\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \underset{u}{\operatorname{arc\,tg} x}\, \underset{dv}{dx} = x \operatorname{arc\,tg} x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} l(1+x^2) + C$$

$$\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \int \underset{u}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \underset{dv}{x\,dx} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - x\right) + C$$

$$\int \underset{u}{x^2} \underset{dv}{e^x dx} = x^2 e^x - \int e^x 2x\cdot dx = x^2 e^x - 2\int e^x x\, dx.$$

Dieses letztere Integral muß nun, die Aufgabe vollständig zu lösen, wie behandelt werden, ebenso wie ~~früher~~ das ursprüngliche. Wir haben daher:

$$\int \underset{u}{x}\, \underset{dv}{e^x dx} = x e^x - \int \ldots e^x dx = e^x(x-1)$$ folglich ist nun

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2e^x(x-1) = e^x(x^2 - 2(x-1)) + \text{Const}.$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int e^x n x^{n-1} dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$$

da aber
$$\int x^{n-1} e^x dx = e^x x^{n-1} - \int e^x (n-1) x^{n-2} dx$$ so erhält

man $$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n e^x x^{n-1} + n(n-1)\int x^{n-2} e^x dx.$$
was auf dieselbe Weise fortgesetzt werden kann, so daß man am Ende hat:

$$\int x^n e^x dx = e^x\left(x^n - n x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} \ldots \mp (n(n-1)(n-2)\ldots 1)\right) + C$$

$$\int \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{dv}{\sin x \cdot dx} = -\sin x \cos x - \int -\cos x \cos x \, dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \cdot dx = -\sin x \cos x + \int (1-\sin^2 x)\, dx =$$

$$= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx \quad \text{daher.}$$

$$2\int \sin^2 x \cdot dx = -\sin x \cos x + x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$$

Dasselbe Resultat dieser Aufgabe erhält man auch auf folgendem Weg.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{(1-\cos 2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x \, dx \quad \text{und}$$

$$\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{x}{2} - \frac{2\sin x \cos x}{4}$$

$$= \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$$

$$\int \underset{dv}{dx}\, \underset{u}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{(1-x^2)} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{(1-x^2)} - \int dx \sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oder auch}$$

$$\int dx \sqrt{(1-x^2)} = \frac{x}{2}\sqrt{(1-x^2)} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

3. Aus der allgemeinen Formel (A.) ergibt sich für den speciellen Fall, daß eine der 2 Funktionen $\varphi(x)$ u. $\psi(x)$ z. B. $\varphi(x)$ sich auf eine Constante reducirt $\varphi'(x) = 0$. So sei demnach $\varphi(x) = k$ so hat man

$$\int k\, \psi(x) \cdot dx = k \int \psi(x) \cdot dx,$$ welcher Satz besagt, daß ein constanter Faktor der Funktion unter dem Integralzeichen vor dasselbe gesetzt werden kann, ein Satz, den wir schon wiederholt angewendet haben, weil er sich unmittelbar aus der Definition des Integrals ergeben hat.

4. Ein weiteres Verfahren, das in der Folge häufige Anwendungen finden wird, besteht in der Einführung einer neuen Veränderlichen, welche den Zweck hat, die Funktion unter dem Integral nach dieser neuen Variabeln in einer einfacheren Form darzustellen u. um die Zurückführung auf die Grundformeln zu bewerkstelligen. Die Umwandlung der gewöhnlich vorkommenden Funktionen in Differenzialausdrücke wurde in der Einleitung hinreichend mit der nöthigen Ausführlichkeit behandelt, weshalb wir kurz darauf hinweisen,

und mit Wiederholung der früheren Bemerkung, daß allg. Regeln für die Formumwandlung durch Substitution nicht existiren.

Wenn man $\int f(x)\cdot dx$ durch eine neue Veränderliche Größe z ausdrücken will welche mit der alten Variablen x in der gewählten Relation $z = \psi(x)$ steht, so wird sich daraus durch Auflösung der Gl. nach x, $x = \varphi(z)$ ergeben. Zb. hat man

$$z = \sin x \text{ so ist: } x = \mathrm{arc}\sin z.$$

Es sei also $x = \varphi(z)$, so ist $dx = \varphi'(z)\cdot dz$ u. man erhält:

daher: $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)\,dz$

Hat man ein gegebenes Integral z.B. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ so setze man hierin $x = z^2$, wodurch es übergeht in:

$$\int\frac{dz}{(x+1)\sqrt{x}} = \int\frac{2z\cdot dz}{(z^2+1)z} = 2\int\frac{dz}{z^2+1} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x} + C$$

Setzt man in dem gegebenen Integrale $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$, $x = z^2-1$ so erfolgt:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int\frac{2z\cdot dz}{(z^2-1)z} = 2\int\frac{dz}{z^2-1} = \ldots\ldots$$

$$\left(x = \varphi(z) = z^2-1,\ dx = \varphi'(z)\cdot dz = 2z\,dz \text{ u. } f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\right)$$

Um dieses Integral bestimmen zu können ist es nur nöthig den Bruch $\frac{1}{z^2-1}$ in Partialbrüche zu zerlegen, wie folgt:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-1)}, \text{ oder:}$$

$$1 = A(z-1) + B(z+1)$$ aus welcher Gl. man für $z=1$ $B=\frac{1}{2}$ u. für $z=-1$ $A=-\frac{1}{2}$ erhält; diese Werthe substituirt erfolgt:

$$\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)}$$ und daher.

$$2\int\frac{dz}{z^2-1} = -\int\frac{dz}{z+1} + \int\frac{dz}{z-1} = \log\frac{z-1}{z+1}$$

oder folglich $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = l\,\frac{\sqrt{(x+1)}-1}{\sqrt{(x+1)}+1}$

Hat man $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$, so setze man darin $e^x = z$, $x = lz$

das Integral geht dadurch über in:

$$\int\frac{\left(\frac{dz}{z}\right)}{z+\frac{1}{z}} = \int\frac{dz}{z^2+1} = \mathrm{arc\,tg}\,z \text{ u. daher: } \int\frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \mathrm{arc\,tg}\,e^x.$$

In dem Integrale $\int\frac{\alpha\cos x+\beta}{a\cos x+b}\sin x\,dx$ setze man $\cos x = z$. so geht es über in:

$\int \frac{\alpha z+\beta}{az+b}(-\partial z) = -\int \frac{\alpha z+\beta}{az+b}\cdot\partial z$. führt man nun auch den Quotienten unter dem Integralzeichen die Division wirklich aus, so erhält man statt dem letzten Integral

$$-\int\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{a\beta-b\alpha}{a(az+b)}\right)\cdot\partial z = -\int\frac{\alpha}{a}\partial z - \frac{1}{a}\int\frac{a\beta-b\alpha}{az+b}\cdot\partial z = -\int\frac{\alpha}{a}\partial z - \frac{a\beta-b\alpha}{a^2}\cdot\int\frac{a\,\partial z}{az+b}$$

$= -\frac{\alpha}{a}\cdot z - \frac{a\beta-b\alpha}{a^2}\cdot l(az+b)$, u. daher:

$$\int\frac{\alpha\cos x+\beta}{a\cos x+b}\sin x\cdot\partial x = -\frac{\alpha}{a}\cos x - \frac{a\beta-b\alpha}{a^2}\, l(a\cos x+b)+C$$
$$= -\frac{1}{a}\left(\alpha\cos x+\frac{a\beta-b\alpha}{a}\, l(a\cos x+b)\right)+C$$

$\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\cdot\partial x$. In diesem gegebenen Integral setze man $e^x = z$, so ist $x = lz$ u. daher verwandelt sich das Integral in:

$\int\frac{z+\frac{1}{z}}{z-\frac{1}{z}}\,\frac{\partial z}{z} = \int\frac{z^2+1}{z(z^2-1)}\cdot\partial z$. Den Bruch unter dem Integralzeichen verwandelt man in Partialbrüche. Es sei demnach:

$\frac{z^2+1}{z(z^2-1)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}$. oder:

$z^2+1 = A(z^2-1)+Bz(z+1)+Cz(z-1)$ aus welcher Gleichung man für $z=0$, $A=-1$; für $z=1$, $B=1$ und für $z=-1$, $C=1$ erhält. daher ist:

$\cancel{\frac{z^2+1}{z(z^2-1)} = \frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+1}}$ ~~oder:~~ $\cancel{z^2+1 = A(z^2-1)+Bz(z+1)+Cz(z-1)}$ ~~aus welcher Gleichung man für~~

$$\int\frac{z^2+1}{z(z^2-1)}\cdot\partial z = \int\left(-\frac{\partial z}{z}+\frac{\partial z}{z-1}+\frac{\partial z}{z+1}\right) = l(z+1)+l(z-1)-lz$$
$= l\frac{z^2-1}{z}$, folglich

$$\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\cdot\partial x = l\frac{e^{2x}-1}{e^x} = l(e^x-e^{-x})+C$$

Die Grundformeln mit den 4 oben angeführten allgemeinen Sätzen bilden die Basis aller folgenden Entwicklungen: und es ist nun unsere Aufgabe zu zeigen wie das Integral der Funktionen zu finden sei, welche unter die in der Einleitung bezeichneten Klassen gehören. d.h. die Methode der Integration

1. der Rationalen, 2 der Irrationalen
3. der logarithmischen u. Exponentialfunktionen
u. 4. der trigonometrischen und der Kreisfunktionen

aufsuchen. Daß sich die irrationalen Funktionen häufig auf rationale Form bringen lassen wurde in der Einleitung gezeigt. Es bleibt also noch einstweilen annoch auf den Zusammenhang zwischen den angeführten transcendenten Funktionen zu finden. Zu diesem Zweck wollen wir den Weg einschlagen welchen nachzu sein Entdecker Joh Bernoulli eingeschlagen hat. und der sich hier ~~eigentlich~~ ganz einfach darbietet, wenn man bemerkt, daß das $\int \frac{dy}{1+y^2}$ sich auf zweierlei Weise finden läßt. Nämlich erstens daß nach der Grdf. III

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y + C_1$ ist und 2 durch die Bemerkung daß sich der Bruch $\frac{1}{1+y^2}$ in zwei imaginäre Partialbrüche zerfällen läßt, denn da

$1+y^2 = (y+\sqrt{-1})(y-\sqrt{-1})$, so kann man setzen

$\frac{1}{1+y^2} = \frac{A}{y+\sqrt{-1}} + \frac{B}{y-\sqrt{-1}}$, woraus erfolgt:

$1 = A(y-\sqrt{-1}) + B(y+\sqrt{-1})$ und $A = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}$, $B = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ daher

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\int \frac{dy}{y-\sqrt{-1}} - \int \frac{dy}{y+\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l(y-\sqrt{-1}) - l(y+\sqrt{-1})\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}} + C_2$$

; folglich wenn man beide Ausdrücke miteinander vergleicht $\operatorname{arctg} y + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}} + C_2$, wobei C_1 u. C_2 die Constanten der Integration bezeichnen. Es sei $C_1 - C_2 = C$, so hat man $\operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{y-\sqrt{-1}}{y+\sqrt{-1}}$. Die Constante läßt sich bestimmen, wenn man $y=0$ setzt. Als Differenz zweier Integrations-Constanten ist C an u. für sich, wie diese willkürlich. Indem sie aber in die obige Gleichung eingeht, wird ihre Willkürlichkeit zum Theile aufgehoben wie sogleich erhellt, wenn man nach obiger Bemerkung $y=0$ setzt. Man erhält, alsdann:

$\operatorname{arctg} 0 = \pm k\pi$ wo k eine positive ganze Zahl, und mit eingeschlossen bedeutet; wird substituirt, so hat man:

$$\pm k\pi + C = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{-\sqrt{-1}}{+\sqrt{-1}}, \text{ woraus erfolgt:}$$

$$C = \pm k\pi + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l(-1),$$ welche Gl. zeigt, daß die Form der Constanten völlig bestimmt durch die willkührliche Größe k, ihr Werth aber zum Theil unbestimmt. Man erhält also, wenn man den Werth v. C in obige Gleich.

$$\operatorname{arc\,tg} y = \pm k\pi + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{\sqrt{(-1)}-y}{\sqrt{(-1)}+y}$$

Multiplicirt man endlich den Bruch hinter dem Logarithmenzeichen im Zähler und Nenner mit $-\sqrt{-1}$, so erfolgt die merkwürdige u. wichtige Gleichung

$$\operatorname{arc\,tg} y = \pm k\pi + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}} \quad (1.$$

Es sei $\operatorname{arc\,tg} y = u$, so ist $y = \operatorname{tg} u$, und man hat:

$$u = \pm k\pi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+\sqrt{-1}\cdot\operatorname{tg} u}{1-\sqrt{-1}\cdot\operatorname{tg} u};$$ Da $\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$ so erfolgt für den Bruch hinter dem Logarithmenzeichen

$$\frac{1+\sqrt{-1}\cdot\operatorname{tg} u}{1-\sqrt{-1}\cdot\operatorname{tg} u} = \frac{\cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u}{\cos u - \sqrt{-1}\cdot\sin u}$$

Multiplicirt man bei dem letzten Quotienten Zähler u. Nenner mit dem Zähler, so erhält man dafür

$(\cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u)^2$ u. alsdann, wenn man setzt:

$$u \mp k\pi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l(\cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u)^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l(\cos^2 u - \sin^2 u + 2\sin u \cos u\sqrt{-1})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l(\cos 2u + \sin 2u\sqrt{-1})$$

Multiplicirt man nun die Gl. mit $2\sqrt{-1}$ u. geht dann von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erfolgt:

$$2(u \pm k\pi)\sqrt{-1} = l(\cos 2u + \sqrt{-1}\cdot\sin 2u) \text{ oder}$$

$$e^{2(u\pm k\pi)\sqrt{-1}} = \cos 2u + \sqrt{-1}\cdot\sin 2u$$

od. für $2u$, u gesetzt. $e^{(u\pm 2k\pi)\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u$

Aus dieser Gl. ergibt sich eine große Menge specieller Formeln, wenn man für u besondere Werthe annimmt. Wir wollen nur den Fall anführen, für $u=0$; Man bekommt alsdann das Resultat:

$$e^{\pm 2k\pi\sqrt{-1}} = +1$$

Es ist also $e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u$ (2), welches Ergebniß zuerst Joh. Bernoulli u. zwar auf ausführliche Weise wie hier gefunden hat. Es spielt diese Gl. in der ganzen

Analysis eine sehr wichtige Rolle. Ihr Character besteht darin, daß man durch sie die trigonometrischen Functionen durch Exponentialfunctionen u. umgekehrt ausdrücken kann. Setzt man $-u$ für u, so geht obige Gleichung über in

$$e^{-u\sqrt{-1}} = \cos u - \sqrt{-1}\cdot\sin u$$

Addirt u. subtrahirt man nun diese beiden letzteren Gleichungen so erfolgt einmal

$$\cos u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2}$$ u. dann

$$\sin u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$. auch

$$tg\, u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{(e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}$$

Die Gleichung $e^{(u\pm 2k\pi)\sqrt{-1}} = \cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u$ führt auf sehr leichte Weise auch zur sogenannten:

Moivre'schen Formel:

Erhebt man jene nämlich in die $m$te Potenz, so erhält man

$$e^{m(u\pm 2k\pi)\sqrt{-1}} = (\cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u)^m$$

Da aber nach Formel (2.) $e^{m(u\pm 2k\pi)\sqrt{-1}} = \cos m(u\pm 2k\pi) + \sqrt{-1}\cdot\sin m(u\pm 2k\pi)$

so folgt daher:

$$(3.)\quad (\cos u + \sqrt{-1}\sin u)^m = \cos m(u\pm 2k\pi) + \sqrt{-1}\cdot\sin m(u\pm 2k\pi)$$

welche Gleichung die sogenannte vervollständigte Moivre'sche Formel ist. Darin kann m irgend eine ganze od. gebrochene positive od. negative Zahl bedeuten. Ist m eine ganze Zahl, so kann das Multiplum $2k\pi$ weggelassen werden. Nicht aber, wenn m keine ganze Zahl ist, weil dann in der Hinzufügung von $\pm 2mk\pi$ erst die Bedeutung u. der Nutzen der Formel liegt. Sie dient uns zunächst zur Auflösung der sogenannten binären Gl., nämlich der Gl. von der Form:

$$x^n \pm 1 = 0 \quad \text{od.} \quad x = \sqrt[n]{\pm 1}$$

1. Um die Gl. $x^n - 1$ aufzulösen, setzt man $m = \frac{1}{n}$ u. damit der Ausdruck links in der Formel (3.) $= +1$ werde, so setze man $u = 0$, so geht sie über in:

$$(+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{\pm 2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pm 2k\pi}{n}$$ oder:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pm 2k\pi}{n}$$

2. Zum Zwecke der Auflösung der Glg $x^n = -1$ setze man wieder $m = \frac{1}{n}$ u. $u = \pm\pi$; Man bekommt alsdann:

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \cos \pm\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\pm\frac{(2k+1)\pi}{n}, \text{ oder:}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

3. Es läßt sich auch die Gleichung $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt{-1}$ auflösen. Denn setzt man $m = \frac{1}{n}$ u $u = \frac{\pi}{2}$, so erfolgt

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{(1\pm 4k)\pi}{2n} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{(1\pm 4k)\pi}{2n}$$

Zur Erläuterung des Gebrauchs dieser Formeln seien nun hier einige Beispiele angeführt. Wir erhielten oben

$$(+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\cdot\sin\pm\frac{2k\pi}{n}$$

u wollen nun für n in diese Glg die Werthe 1, 2, 3, 4 ... einsetzen, um alsdann die verschiedenen Werthe, welche die Potenz annimmt, kennen zu lernen. Für $n=1$ erhält man den einzigen Werth $+1$ für $(+1)^{\frac{1}{1}}$, welchen Werth man auch für k nehmen möge. Ist $n=2$, so wird

$\sqrt{+1} = \cos k\pi + \sqrt{(-1)}\sin k\pi$, wo die Potenz $(+1)^{\frac{1}{2}}$ für $k=0$ den Werth $+1$ und für $k=1$ den Werth -1 annimmt; für $k = 2, 3, \ldots$ erhält man immer wieder dieselben Resultate. Für $n=3$ erhält die Potenz die Werthe

$$+1,\ \cos\tfrac{2}{3}\pi + \sqrt{-1}\cdot\sin\tfrac{2}{3}\pi$$
$$\cos\tfrac{2}{3}\pi - \sqrt{-1}\cdot\sin\tfrac{2}{3}\pi$$

für $n=4$ .... $+1,\ +\sqrt{-1},\ -\sqrt{-1},\ -1$

" $n=5$ ... $+1,\ \cos\frac{2}{5}\pi + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2}{5}\pi,\ \cos\frac{2}{5}\pi - \sqrt{(-1)}\sin\frac{2}{5}\pi$

$\cos\frac{4}{5}\pi + \sqrt{(-1)}\cdot\sin\frac{4}{5}\pi,\ \cos\frac{4}{5}\pi - \sqrt{(-1)}\cdot\sin\frac{4}{5}\pi.$

" $n=6$ ... $+1,\ \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{(-1)}\sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{(-1)}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{2}{3}\pi + \sqrt{(-1)}\sin\frac{2}{3}\pi,\ \cos\frac{2}{3}\pi - \sqrt{(-1)}\sin\frac{2}{3}\pi,\ -1,$

Verfährt man mit der Glg $(-1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{(-1)}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ gerade so, so nimmt nacheinander die Potenz für $n = 1, 2, 3 \ldots$ folgende Werthe an.

für $n=1$ erhält man den einzigen Werth -1

für $n=2$ " " die Werthe $+\sqrt{-1}$ u $-\sqrt{-1}$

" $n=3$ " " " " $\cos\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}$ u -1

" $n=4$ " " " " $\cos\frac{\pi}{4} \pm \sqrt{(-1)}\sin\frac{\pi}{4}$ und

$\cos\frac{3}{4}\pi \pm \sqrt{(-1)}\sin\frac{3}{4}\pi.$

" $n=5$ erhält die Potenz die Werthe $\cos\frac{\pi}{5} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pi}{5}$

$\cos\frac{\pi}{5} - \sqrt{(-1)}\sin\frac{\pi}{5},\ \cos\frac{3}{5}\pi + \sqrt{(-1)}\sin\frac{3}{5}\pi$

. . . — — — — $\cos\frac{3}{5}\pi - \sqrt{(-1)}\cdot\sin\frac{3}{5}\pi.$

Man sieht aus der Stelle, daß für k nicht alle n Werthe von 0 an zu setzen sind, sondern wenn n gerade, nur alle Werthe 0 (incl) bis $\frac{n}{2}$ und wenn n ungerade alle Werthe von 0 (incl) bis $\frac{n-1}{2}$ gesetzt zu werden brauchen.

Die Formel (3.) läßt sich auch noch zur Entwicklung einer ganzen positiven Potenz des Sinus u. Cosinus eines Bogens nach den Sinus u. Cosinus der Vielfachen dieses Bogens anwenden. Diese Entwicklungen sind auch in der Folge sehr nützlich, weshalb sie hier ausführlich angeführt werden sollen.

Wir fanden oben:

$$\sin u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \text{ u. } \cos u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2} \text{ und.}$$

Ist also $\sin u^m$ u. $\cos u^m$ gegeben, so läßt sich zur Entwicklung derselben der Binomische Lehrsatz auf die rechte Seite der Gleichungen anwenden; denn man hat

$$2^m \cdot (\sqrt{-1})^m \cdot \sin u^m = (e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}})^m \text{ und:}$$

$$2^m \cdot \cos u^m = (e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}})^m$$

Es erfolgen hier nun 4 Entwicklungen, da m gerade oder ungerade sein kann.

m gerade.

$$(e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}})^m = e^{mu\sqrt{-1}} - \frac{m}{1} e^{(m-2)u\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} e^{(m-4)u\sqrt{-1}} - \dots$$
$$\dots \pm \frac{m(m-1)\cdots(\frac{m}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots\frac{m}{2}} \mp \dots - \frac{m}{1} e^{-(m-2)u\sqrt{-1}} + e^{-mu\sqrt{-1}}$$

$$(e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}})^m = e^{mu\sqrt{-1}} + \frac{m}{1} e^{(m-2)u\sqrt{-1}} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} e^{(m-4)u\sqrt{-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\cdots(\frac{m}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots\frac{m}{2}} + \dots \frac{m}{1} e^{-(m-2)u\sqrt{-1}} + e^{-mu\sqrt{-1}}$$

Bemerkt man, daß in beiden Entwicklungen das erste u. letzte, das zweite u. zweitletzte, das dritte u. drittletzte Glied etc. zusammengenommen sich durch $\cos mu$, $\cos(m-2)u$, $\cos(m-4)u$ etc. ausdrücken lassen, nach der Formel

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2\cos v,$$

so wird man nach geschehener Division durch 2, die folgenden zwei Entwicklungen erhalten für gerade Werthe v. m.

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2^{m-1} \cdot \sin u^m = \cos mu - m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos(m-6)u + \dots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2} \frac{m(m-1)\cdots(\frac{m}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots\frac{m}{2}}$$

$$2^{m-1}\cos u^m = \cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(m-4)u + \dots$$
$$+ \dots + \frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)\cdots(\frac{m}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots\frac{m}{2}}.$$

Ist m ungerade, so erhält man für $\sin u^m$ u. $\cos u^m$ dieselben Entwickelungen mit Ausnahme des letzten constanten Gliedes, weil hier der Exponent von e $-u\sqrt{-1}$ u. $+u\sqrt{-1}$ aber nie zero wird; es gibt also hier kein von u freies Glied. Der Coefficient dieser Potenzen ist bei beiden dem Werthe nach derselbe, aber auch mehr übereinstimmend mit jenem des letzten Gliedes der vorigen Entwickelungen. Es ist nämlich:
$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots\frac{m+3}{2}}{1.2.3\dots\dots\frac{m-1}{2}}$$

Aus vorausgesetzt erhält man für ungerade Werthe v. m die folgenden Entwickelungen:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}.2^{m-1}.\sin u^m = \sin mu - \frac{m}{1}\sin(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)u - \dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}.\frac{m(m-1)\dots\frac{m+3}{2}}{1.2\dots\frac{m-1}{2}}.\sin u$$

$$2^{m-1}.\cos u^m = \cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)u \dots + \frac{m(m-1)\dots\frac{m+3}{2}}{1.2\dots\frac{m-1}{2}}\cos u$$

4. Satz von Wichtigkeit. Den Logarithmus eines imaginären Ausdrucks in seinen realen u. imaginären Bestandtheil zu zerlegen, was sich leicht durch die bisher ~~[illegible]~~ Formeln bewirken lässt. Der gegebene Ausdruck sei:
$l(p+q\sqrt{-1})$, wo p u. q reale Größen sind. Man soll ihn in die Form $P + Q\sqrt{-1}$ zerlegen. Zur Lösung dieser Aufgabe kann man folgenden Weg einschlagen.
Man hatte: 1.
$$l\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,(2\,\mathrm{arc\,tg}\,y \pm 2k\pi)$$
Man setze in dieser Formel $2\,\mathrm{arc\,tg}\,y = \mathrm{arc\,tg}\,z$, so ist bekanntlich, weil nämlich $\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\sqrt{1+\mathrm{tg}\,\alpha^2}}$

$y = \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$ u. es wird daher $\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}} = \frac{1+z\sqrt{-1}+\sqrt{1+z^2}}{1-z\sqrt{-1}+\sqrt{1+z^2}} = \frac{1+z\sqrt{-1}}{\sqrt{1+z^2}}$

Die obige Formel geht also über in
$$l\,\frac{1+z\sqrt{(-1)}}{\sqrt{1+z^2}} = \sqrt{(-1)}\,(\mathrm{arc\,tg}\,z \pm 2k\pi)$$ oder, wenn man $z = \frac{q}{p}$ setzt u. den Logarithmus des Nenners auf die andere Seite bringt: so ist
$$l(p+q\sqrt{-1}) = l\sqrt{(p^2+q^2)} + \sqrt{(-1)}\,(\mathrm{arc\,tg}\,\tfrac{q}{p} \pm 2k\pi)$$
$$= P + Q\sqrt{-1}.$$

Auf eine, mehr direkte Weise lässt sich diese Gleichung erhalten, wenn man setzt:

$$p+q\sqrt{-1} = \rho(\cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u)$$

welche Annahme immer gestattet ist, weil sich, was auch p u. q für Größen seien, für ρ u. u immer mögliche Werthe ergeben; denn aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$p = \rho\cos u \text{ u. } q = \rho\sin u, \text{ also } tg\, u = \frac{q}{p}$$

und wenn man die beiden ersteren dieser drei Gleichungen quadrirt u. dann addirt, so erhält man: $\rho = \sqrt{p^2+q^2}$, und aus der dritten folgt: $u = arc\, tg\frac{q}{p}$. Es ist somit

$$p+q\sqrt{-1} = \sqrt{p^2+q^2}\,(\cos u + \sqrt{-1}\cdot\sin u) = \sqrt{p^2+q^2}\, e^{(u\pm 2k\pi)\sqrt{-1}}$$
$$= \sqrt{(p^2+q^2)}\cdot e^{(arc\, tg\frac{q}{p} \pm 2k\pi)\sqrt{-1}} \text{ oder:}$$

$$(\alpha)\quad l(p+q\sqrt{-1}) = l(\sqrt{p^2+q^2}) + \sqrt{-1}(arc\, tg\frac{q}{p} \pm 2k\pi) = P + Q\sqrt{-1}$$

wie vorhin.

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich auch die Funktion $arc\, tg\,(p+q\sqrt{-1})$ auf die Form $P+Q\sqrt{-1}$ bringen.

Beispiele.
$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{-1}$$

$$e^{\frac{4k+1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \cos\frac{4k+1}{2}\pi + \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{4k+1}{2}\pi = \sqrt{-1}$$

Ferner sei gegeben $\sqrt[5]{\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}}$. Man wende hier die Formel $p+q\sqrt{-1} = \sqrt{(p^2+q^2)}\cdot e^{(arc\, tg\frac{q}{p}\pm 2k\pi)\sqrt{-1}}$ an und setze darin $p=\frac{1}{6}$ u. $q=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, so ist $\frac{q}{p} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$;

$\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$ mithin ist:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1} = \frac{1}{3}e^{(arc\, tg\sqrt{3}\pm 2k\pi)\sqrt{-1}}, \text{ also:}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}\cdot e^{\frac{1}{5}(arc\, tg\sqrt{3}\pm 2k\pi)\sqrt{-1}}$$

Da aber in der Formel $arc\, tg\sqrt{3} = u$ ist, so folgt: $tg\, u = \sqrt{3}$;
daher: $\cos u = \frac{1}{\sec u} = \frac{1}{\sqrt{1+tg\, u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$; also bekanntlich $u = 60° = \frac{\pi}{3}$.

Demnach ist nun, da $arc\, tg\sqrt{3} = u = \frac{\pi}{3}$ ist,

$$\sqrt[5]{\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}\cdot e^{\frac{1}{5}(\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi)\sqrt{-1}} = \frac{e^{\frac{1\pm 6k}{15}\pi\sqrt{-1}}}{\sqrt[5]{3}}$$

diese Exponentialgröße nun wieder durch Sinus u. Cosinus ausgedrückt, gibt als Endresultat:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}\left(\cos\frac{1\pm 6k}{15}\pi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{1\pm 6k}{15}\pi\right)$$

Setzt man hierin $k = 0, 1, 2$ usw., so erhält man folgende Werthe für die Wurzel für $k=0$ erhält man: $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}(\cos 12 \pm \sqrt{-1}\sin 12)$

$k=1$ " " $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}(\cos 84 \pm \sqrt{-1}\cdot\sin 84)$

$k=2$ " " $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}(\cos 156 \pm \sqrt{-1}\cdot\sin 156°)$

$= \frac{1}{\sqrt[5]{3}}(-\cos 24° \pm \sqrt{-1}\cdot\sin 24°)$

16) Sei gegeben $l(1+3\sqrt{-1})$ zu entwickeln. In diesem Zwecke setze man in der Formel (α.) $p=1$, u. $q=3$ so ist $\sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{10}$ u. $\frac{q}{p} = 3$, folglich

$l(1+3\sqrt{-1}) = l\sqrt{10} + \sqrt{-1}\,(\operatorname{arc\,tg} 3 \pm 2k\pi)$, oder

$= l\sqrt{10} + (u \pm 2k\pi)\sqrt{-1}$, wobei $\operatorname{tg} u = 3$ ist.

Nun soll die Potenzen des Sinus u. Cosinus durch die Vielfachen des Bogens ausdrücken.

Für ungerade Potenzen hat man:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sin u^m \cdot 2^{m-1} = \sin mu - \frac{m}{1}\sin(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)u$$
$$- \dots\dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m(m-1)\dots\dots\frac{m+3}{2}}{1\cdot 2\dots\dots\frac{m-1}{2}} \cdot \sin u$$

Hieraus ergibt sich:

für $u = x$ u. $m = 3$; $-4\sin x^3 = \sin 3x - 3\sin x$

$$\sin x^3 = \frac{3}{4}\sin x - \frac{\sin 3x}{4}$$

u. für $u = x$ u. $m = 5$; $16\sin x^5 = \sin 5x - 5\sin 3x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\sin x$

$$\sin x^5 = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

endlich für $u = x$ u. $m = 7$

$$-64\sin x^7 = \sin 7x - 7\sin 5x + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\sin 3x - \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\sin x$$
$$\sin x^7 = \frac{1}{64}(35\sin x - 21\sin 3x + 7\sin 3x - \sin 7x)$$

Ebenso hat man für ein ungerades m.

$$2^{m-1}\cdot\cos u^m = \cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u$$
$$\dots\dots + \frac{m(m-1)\dots\dots\frac{m+3}{2}}{1\cdot 2\dots\dots\frac{m-1}{2}}\cos u$$

Hieraus ergibt sich gleichfalls für

$u = x$ und $m = 3$. $4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$

$$\cos x^3 = \frac{3}{4}\cos x + \frac{\cos 3x}{4}$$

$m=5$: $16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\cos x$

$$\cos x^5 = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x)$$

$m=7$. $64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\cos 3x + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos x$

$$\cos x^7 = \frac{1}{64}(35\cos x + 21\cos 3x + 7\cos 5x + \cos 7x)$$

Für gerade Potenzen v. m erhält man, wenn man in die Formel

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot 2^{m-1}\sin u^m = \cos mu - m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u$$
$$+ \dots\dots + (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{m(m-1)\dots(\frac{m}{2}+1)}{1\cdot 2\dots\dots\frac{m}{2}}$$

$x = u$ gesetzt u. $m = 2, 4, 6 \dots$

für $m = 2$ $\quad -2\sin x^2 = \cos 2x - 1$ oder auch $\cos 2x = 1 - 2\sin x^2$

$$\sin x^2 = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$m = 4$ $\quad 8\sin x^4 = \cos 4x - 4\cos 2x + 3$

$$\sin x^4 = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$$

$m = 6$.. $\quad -32\sin x^6 = \cos 6x - 6\cos 4x + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cos 2x - 10$

$$\sin x^6 = \frac{1}{32}(10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x)$$

Setzt man in die Formel

$$2^{m-1}\cdot \cos u^m = \cos mu + m\cos(m-2)u + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)u + \ldots\ldots + \frac{\frac{1}{2}\cdot m(m-1)\ldots(\frac{m}{2}+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\frac{m}{2}}$$

$u = x$ u. $m = 2, 4, 6\ldots$ so erfolgt

für $m=2$ $\quad 2\cos x^2 = \cos 2x + 1;\quad \cos x^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

für $m=4$ $\quad 8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$

$$\cos x^4 = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

für $m=6$: $\quad 32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\cos 2x + 10$

$$\cos x^6 = \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)\ \ldots$$

Diese allgemeinen Sätze vorausgesetzt ist es nun unsere weitere Aufgabe die in der Einleitung aufgeführten Klassen v. Functionen nach einander der Operation des Integrirens zu unterziehen u. beginnen mit der einfachsten derselben, nämlich mit der Integration der rationalen Functionen.

Es seien l u. i zwei ganze posit. Zahlen u. $l < i$, so kann (wie früher gezeigt wurde, jede rat. Function auf eine ganze rationale u. auf eine echt gebrochene zurückgeführt werden, deren allgemeine Form folgender Quotient darstellt.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{ax^l + bx^{l-1} + cx^{l-2} + \ldots\ldots px + q}{a_1x^i + b_1x^{i-1} + c_1x^{i-2} \ldots p_1x + q_1}$$

Eine solche echt gebrochene Function läßt sich nicht unmittelbar integriren, sondern bedarf einer vorhergehenden algebraischen Umformung, nämlich der Zerfällung in einzelne Brüche. Nun wurde aber früher bewiesen, daß die Zerfällung unter allen Umständen auf eine ~~Reihe~~ Reihe von Partialbrüchen führt, welche sich einbegreifen durch die zwei Quotienten

$$\frac{a}{(x-\alpha)^n} \text{ u. } \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$ respective lassen, aus deren Integration

sich also die Integration aller rationalen Functionen reduciren läßt.

1. Das Integral $\int\frac{a\,dx}{(x-\alpha)^n}$ ergibt sich, den Fall $n=1$ ausgeschlossen, sogleich aus der ersten Grundformel

$$a\int(x-\alpha)^{-n}dx = \frac{a(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}\text{, daher}$$

$$\int\frac{a\,dx}{(x-\alpha)^n} = -\frac{a}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C$$

Ist $n = 1$, so reducirt sich das Integral, nach Grundformel II auf:

$$\int \frac{a\,dx}{x-\alpha} = a\,l(x-\alpha) + C$$

2. Das Integral

$$\int \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}\,dx$$ läßt sich durch wiederholte Anwendung der theilweisen Integration finden. — Da

$ax+b = a(x-\alpha) + a\alpha+b$, so ergiebt sich:

$$\frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} = \frac{a(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} + \frac{a\alpha+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$

Und da der erste der beiden Brüche auf der rechten Seite sich unmittelbar nach der ersten Grundformel integriren läßt, indem:

$$\int \frac{a(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}\,dx = -\frac{a}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}},$$ so hat man:

A. $$\int \frac{(ax+b)\,.\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} = -\frac{a}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} + (a\alpha+b)\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$

Es ist also das gegebene Integral reducirt auf ein anderes mit constantem Zähler. Um nun auch dieses auf ein anderes zurückzuführen, in welchem der Exponent des Nenners niedriger ist, als m, wende man die Methode der theilweisen Integration an; setzt man in die Formel

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du \qquad v = x-\alpha,\ u = \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$

so hat man $du = -\frac{2m(x-\alpha)\cdot dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m+1}}$, und daher:

$$\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} = \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} + 2m\int \frac{(x-\alpha)^2}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m+1}} \cdot dx$$

Addirt und subtrahirt man nun im Zähler und Nenner dieses letzten Integrals β^2, so wird es übergehen in

$$\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} - \int \frac{\beta^2\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m+1}}$$ Substituirt man dieses seinen Werth so erhält man:

$$2m\beta^2 \int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m+1}} = \frac{x-\alpha}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} + (2m-1)\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$$

Oder, wenn man für $m+1$, m setzt:

(B.) $$\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} = \frac{x-\alpha}{2(m-1)\beta^2} \cdot \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)\beta^2} \int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}}.$$

durch welche Formel die Verminderung des Exponenten um eine Einheit bewirkt ist; wenn man diese Reductionsformel wiederholt anwendet, kann der Exponent des Nenners unter dem Integralzeichen bis auf die Einheit selbst gebracht werden, aber auch nicht, weil sonst der Coefficient des übrig bleibenden Integrals unendlich groß würde. Uebrigens kann das Integral

$\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ unmittelbar nach der dritten Grundformel gefunden werden, wenn man dasselbe in die Form:

$$\frac{1}{\beta}\int\frac{d\left(\frac{x}{\beta}\right)}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}$$ bringt, wobei bekanntlich $$= \frac{1}{\beta}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$ ist.

Setzt man nun den Werth des Integrals $\int\frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$ aus obiger Formel (B) in die Formel (A.) ein, so erhält man

$$\int\frac{(ax+b)\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} = -\frac{a}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}} \quad (C.)$$
$$+(a\alpha+b)\left(\frac{x-\alpha}{2(m-1)\beta^2}\cdot\frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2(m-1)\beta^2}\int\frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}}\right)$$

Durch diese beiden Formeln der Integration der gewöhnlichen $\frac{a}{(x-\alpha)^m}$ u. $\frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$ ist die Integration aller rationalen Funktionen geleistet, wenn man die Form der Partialbrüche voraussetzt.

Beispiele. Es ist gegeben $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$, so ist nach Formel B: wenn $\alpha=0$, $\beta=1$, u. $m=3$ zu setzen ist:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2};$$ Es ist aber nach derselben Reductionsformel

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x$$

folglich substituirt man $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\right)$

$$= \frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1}+\mathrm{arctg}\,x\right)$$

Ferner ist gegeben: $\int\frac{x+1}{((x-1)^2+1)^2}\,dx$. In der Formel C setze man $a=1$, $b=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ u. $m=2$, so erfolgt

$$\int\frac{x+1}{((x-1)^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}+2\int\frac{dx}{((x-1)^2+1)^2}.$$

Wendet man bei dem letztern Integral die Formel

(B) an, so wird:

$$\int \frac{\partial x}{((x-1)^2+1)^2} = \frac{x-1}{2((x-1)^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{(x-1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{(x-1)^2+1} + \operatorname{arctg}(x-1)\right)$$

folglich $\displaystyle\int \frac{x+1}{((x-1)^2+1)^2}\partial x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1} + \frac{x-1}{(x-1)^2+1} + \operatorname{arctg}(x-1)$

$$= \frac{2x-3}{2((x-1)^2+1)} + \operatorname{arctg}(x-1)$$

Man sieht hieraus, daß die Integration rationaler Functionen v. x unter allen Umständen geleistet werden kann, was folgendes specielle Zahlen-Beispiel noch zeigen soll.

Man soll den Bruch $\dfrac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}$ integriren.

Vor Allem ist es nöthig, ihn in Partialbrüche zu zerlegen. Zu diesem Zwecke sucht man die Wurzeln des Nenners u. setzt denselben daher $=0$

$x^3-6x^2+11x-6=0$. Die Wurzeln dieser Gl. sind: 1, 2 u. 3 und es ist folglich

$$\frac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{3x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \text{ oder:}$$

$$3x+2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

Aus welcher Gl. sich für $x=1$ $A=\frac{5}{2}$;

" $x=2$ $\cancel{A}$ $B=-8$ und

für $x=3$ $C=\frac{11}{2}$ ergeben.

Es ist daher: $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}\partial x = \int\left(\frac{5}{2}\frac{1}{x-1} - 8\frac{1}{x-2} + \frac{11}{2}\frac{1}{x-3}\right)\partial x$

$$= \frac{5}{2}l(x-1) - 8l(x-2) + \frac{11}{2}l(x-3) = l\,\frac{(x-1)^2(x-3)^5\sqrt{(x-1)(x-3)}}{(x-2)^8}$$

Ein häufig vorkommendes Integral ist

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+2bx+c}\,\partial x$$

worin m, n, a, b, c beliebige, reale Coefficienten sein sollen. Wir wollen dieses Integral auch mit derselben Allgemeinheit ermitteln.

Bemerkt man, daß sich der Zähler $mx+n$ in der Form

$\dfrac{m}{2a}\left(2ax+2b+\dfrac{2(an-bm)}{m}\right)$ bringen läßt

so wird das gegebene Integral sich in 2 andere zerfällen lassen, wovon eins zum Zähler den Differenzialquotienten des Nenners, und das zweite einen Constanten hat, so daß es folgt: $\int\frac{mx+n}{ax^2+2bx+c}\cdot\partial x = \frac{m}{2a}\int\frac{2ax+2b}{ax^2+2bx+c}\cdot\partial x + \frac{an-bm}{a}\int\frac{\partial x}{ax^2+2bx+c}$

$$= \frac{m}{2a}\,l(ax^2+2bx+c) + \frac{an-bm}{a}\int\frac{\partial x}{ax^2+2bx+c}$$

Um das letztere Integral ausführen zu können, suchen wir zunächst die Bedingungen auf, unter welchen sich der quadratische Nenner in reelle lineare Faktoren zerfällen läßt. — Man setze zu dem Ende

$$ax^2+2bx+c=0, \text{ so ist:}$$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

Damit die beiden Wurzeln der Gleichung reell seien muß $b^2-ac>0$ od. $=0$ sein.

1. Ist $b^2-ac>0$, so kann man den quadratischen Ausdruck in 2 reelle lineare Faktoren zerfällen u. hat:

$$ax^2+2bx+c = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(ax+b-\sqrt{b^2-ac}\right)\left(ax+b+\sqrt{b^2-ac}\right)$$

Setzt man: $\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}=\alpha$ u. $\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}=\beta$, so ist:

$\int\frac{\partial x}{ax^2+2bx+c} = \int\frac{a\,dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$; Man setze:

$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$, oder: $1=A(x-\beta)+B(x-\alpha)$, woraus sich $A=\frac{1}{\alpha-\beta}$ u. $B=\frac{1}{\beta-\alpha}$ ergeben; Man hat daher:

$$\int\frac{\partial x}{ax^2+2bx+c} = a\int\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{1}{x-\beta}\right)\partial x$$

$$= \frac{a}{\alpha-\beta}\cdot l(x-\alpha) + \frac{a}{\beta-\alpha}\,l(x-\beta)$$

Substituirt man nun die Werthe v. α u. β u. reducirt alsdann die Ausdrücke, so erhält man für $b^2-ac>0$

I. $\int\frac{mx+n}{ax^2+2bx+c}\cdot\partial x = \frac{m}{2a}\,l(ax^2+2bx+c) + \frac{an-bm}{2a\sqrt{b^2-ac}}\,l\frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} + C$

2. Ist $b^2-ac=0$, so hat man $ax^2+2bx+c$, 2 gleiche Wurzeln, jede $=-\frac{b}{a}$ und man kann daher diesen Ausdruck setzen $=\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}(ax+b)^2$

Das zu bestimmende Integral $\int\frac{\partial x}{ax^2+2bx+c}$ geht alsdann über in

$a\int\frac{a\,dx}{(ax+b)^2} = -\frac{a}{ax+b}$ und man erhält daher für $b^2-ac=0$

II. $\int\frac{\partial x(mx+n)}{ax^2+2bx+c} = \frac{m}{a}\,l\frac{ax+b}{a} - \frac{an-bm}{a(ax+b)} + C$

III, $b^2 - ac < 0$. In diesem Falle läßt sich der quadratische Nenner nicht mehr in reele Faktoren des ersten Grades zerlegen. Will man also imaginäre Partialbrüche u. folglich imaginäre Logarithmen vermeiden, welche nach dem Vorhergehenden durch reale Bogen ausgedrückt werden können, so kann man zu den letzteren unmittelbar auf folgende Weise gelangen. Offenbar ist: $ax^2+2bx+c = \frac{1}{a}(a^2x^2+2abx+b^2+ac-b^2)$

$= \frac{1}{a}((ax+b)^2+ac-b^2) = \frac{ac-b^2}{a}\left(\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2+1\right)$ folglich

$$\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \frac{a}{ac-b^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int\frac{\frac{a\,dx}{\sqrt{ac-b^2}}}{\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)^2+1}$$

$= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + C$ Setzt man den Werth dieses Integrals in die ursprüngliche Formel, so erhält man für $b^2-ac<0$ oder negativ

III. $\int\frac{mx+n}{ax^2+2bx+c}dx = \frac{m}{2a}l(ax^2+2bx+c) + \frac{an-bm}{a\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$

Zur Erläuterung des Gebrauchs dieser 3 Formeln mögen Beispiele dienen.

Es sei gegeben $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot dx$. hier ist $m=2$, $n=1$, $a=1$, $b=\frac12$, $c=1$, $b^2-ac=\frac14-1 < 0$ es ist folglich hier die dritte Formel anzuwenden u. man erhält also dann

$\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot dx = l(x^2+x+1)$ indem $\frac{m}{2a}=\frac22=1$ u. $an-bm=1-\frac22=0$ ist. Ferner habe man

$\int\frac{3x-1}{2x^2-x+1}\cdot dx$ hier ist $m=3$, $n=-1$, $a=2$, $b=-\frac12$, $c=1$, $b^2-ac=\frac14-2<0$ daher gehört dies Integral wieder nach III wie beim vorhergehenden Beispiel.

$$\int\frac{3x-1}{2x^2-x+1}dx = \frac34 l(2x^2-x+1) - \frac{\frac12}{\frac22\sqrt7}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-\frac12}{\frac12\sqrt7}+C$$

$$= \frac34 l(2x^2-x+1) - \frac{1}{2\sqrt7}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt7}+C$$

Es sei gegeben $\int\frac{dx}{x^2-6x+1}$. Man hat hier $m=0$, $n=1$, $a=1$, $b=-3$, $c=1$, $b^2-ac=9-1=8>0$, es ist hier also die erste Formel anzuwenden.

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+1} = -\frac{1}{2\sqrt8}l(x-3+\sqrt8)+\frac{1}{2\sqrt8}l(x-3-\sqrt8) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt2}\,l\frac{x-3-\sqrt8}{x-3+\sqrt8}+C$$

Man habe ferner $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+1}\cdot dx$; hier ist für $m=3,\ n=1$, $a=1,\ b=-1,\ c=1$

$b^2-ac=1-1=0$; daher ist die 2te Formel hier in Anwendung zu bringen

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x+1}\cdot dx = 3\,l(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$$

Als Anwendung der eben angeführten Integrale, soll noch schließlich die Integration der Brüche $\frac{x^m}{x^n \mp 1}$ folgen. Unter der Voraussetzung, daß m u. n positive ganze Zahlen seien u. $m < n$.

Der Integration muß die Zerfällung der Brüche in Partialbrüche vorangehen. Wir unterscheiden dabei 2 Fälle nämlich, wenn x^n-1, u. x^n+1 den Nenner des Bruches bildet:

1. Man habe $\frac{x^m}{x^n-1}$, so setze man $x^n-1=0$ oder $x^n=1$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichung ist nach dem Vorhergehenden (Moivre'sche Satz)

$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$, wobei k alle Werthe v. 0 bis $\frac{n}{2}$ wenn n gerade, u. alle Werthe von 0 bis $\frac{n-1}{2}$ wenn n ungerade, zu setzen sind. Nach der Theorie der Partialbrüche muß man um die Coefficienten zu erhalten den Nenner differenziren u. in den Bruch alsdann die Werthe v. x setzen, die den Nenner zu 0 machen. Man erhält dann:

$\frac{x^m}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{x^{m+1}}{x^n}$. Da nun x^n für alle Werthe $x_1 = 1$ ist, so hat man auch $= \frac{1}{n}x^{m+1}$

1) für n gerade: so erhält man also alle Zähler, der Partialbrüche aus dem Ausdruck

$$\frac{1}{n}\left(\cos\frac{2k(m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}\right)$$

wenn man darin für k alle Werthe v. 0 bis $\frac{n}{2}$ setzt; die Nenner dieser Partialbrüche sind

$$x - \cos\frac{2k(m+1)\pi}{n} \mp \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

Denkt man sich diese Partialbrüche gebildet u. je 2 conjugirte in einen einzigen Bruch vereinigt, wird dieser jedesmal reell sein u. [illegible] die Rechnung ausführt, so erhält man für n gerade

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1} + \frac{x\cos\frac{3(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{3m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1} + \dots \frac{x\cos\frac{(n-2)(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{x+1}\right)$$

Für n ungerade erhält man:

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{1}{n}\Bigg(\frac{1}{x-1} + \frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1} + \frac{x\cos\frac{3(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{3m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1}$$
$$+ \cdots\cdots \frac{x\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{(n-1)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\Bigg)$$

2. Die Zerfällung des Bruches $\frac{x^m}{x^n+1}$ erfordert die Auflösung der Gl. $x^n+1=0$, welche bekanntlich gibt

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Setzt man diese Werthe v. x in den Ausdruck $\frac{1}{n}x^{m+1}$ und nimmt für k, je nachdem n gerade od. ungerade ist die Zahlen von 0 bis $\frac{n}{2}$ oder von 0 bis $\frac{n-1}{2}$ u. verfährt auf gleiche Weise, wie oben, so erhält man nach Vereinigung der conjugirten imaginären Partial-Brüche die folgenden 2 Formeln.

Für n gerade:

$$\frac{x^m}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\Bigg(\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1} + \frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}$$
$$+ \cdots\cdots \frac{x\cos\frac{(n-1)(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{(n-1)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1}\Bigg)$$

Für n ungerade

$$\frac{x^m}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\Bigg(\frac{x\cos\frac{(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1} + \frac{x\cos\frac{2(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{2m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1}$$
$$+ \cdots\cdots \frac{x\cos\frac{(n-2)(m+1)\pi}{n} - \cos\frac{(n-2)m\pi}{n}}{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1} + \frac{(-1)^{m+1}}{x-1}\Bigg)$$

Soll nun das Integral $\int\frac{x^m}{x^n\mp1}\,dx$ gefunden werden, so ist leicht zu bemerken, daß dasselbe aus dem Aggregat v. Integralen besteht welche sämmtlich unter der Form

$$\int\frac{x\cos\alpha-\cos\beta}{x^2-2x\cos\gamma+1}\,dx$$

begriffen sind welche nach dem Vorhergehenden unmittelbar integrirt werden kann, wenn man setzt $m=\cos\alpha$, $n=-\cos\beta$ u. $a=1$, $b=-\cos\gamma$, $c=1$, denn man hat nach der Formel III. indem $b^2-ac=\cos^2\gamma-1 = -\sin^2\gamma$ also negativ ist

$$\int\frac{x\cos\alpha-\cos\beta}{x^2-2x\cos\gamma+1}\,dx = \frac{\cos\alpha}{2}\,l(x^2-2x\cos\gamma+1)$$
$$+\frac{\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta}{\sin\gamma}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\gamma}{\sin\gamma}+C$$

Folgende Beispiele werden nun den gebrauch aller gefundenen formeln erläutern.

$$\int\frac{1+x^2}{x^2-x}\,\partial x = \int\frac{1+x^2}{x(x^2-1)} \qquad \frac{1+x^2}{x(x^2-1)} = \frac{1+x^2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$1+x^2 = A(x^2-1) + B(x-1)x + Cx(x+1)$$

für $x=0$ erhält man $A=-1$
für $x=1$ " " $C=+1$
" $x=-1$ " " $B=+1$ Daher

$$\int\frac{1+x^2}{x^2-x}\,\partial x = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\partial x = l\,\frac{x^2-1}{x} + C$$

$$\int\frac{\partial x}{(x-1)^2(x+1)} ; \quad \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$1 = A(x-1)^2 + B(x+1) + C(x^2-1)$ Man erhält hieraus
$A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{4}$ daher

$$\int\frac{\partial x}{(x-1)^2(x+1)} = \int\left(\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)}\right)\partial x$$

$$= \frac{1}{4}\,l(x+1) - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\,l(x-1) = \frac{1}{4}\,l\,\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)} + C$$

$\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,\partial x$; Man setze $m=-1$, $n=2$, $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$ und, da $b^2-ac=\frac{1}{4}-1$ also negativ ist, wende die formel $\underline{III}$ an. Man hat alsdann

$$\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,\partial x = -\frac{1}{2}\,l(x^2+x+1) + \frac{2-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\,l(x^2-x+1) + \frac{3}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\,l(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3+1} = \int\frac{\partial x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \int\left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\right)\partial x$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \qquad 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$ daher.

$$\int\frac{\partial x}{x^3+1} = \int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right)\partial x = \frac{1}{3}\,l(x+1) + \frac{1}{3}\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}\,\partial x$$

Da wir im vorhergehenden Beispiele dieses Integral schon bestimmt haben, so ist nun also:

$$\int\frac{\partial x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\,l(x+1) - \frac{1}{6}\,l(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= l\,\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[6]{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

$\int \frac{4x^3}{(x^2+x+1)^2} \cdot dx$; Man zerlege den Bruch in Partialbrüche

$$\frac{4x^3}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$4x^3 = Ax + B + (Cx+D)(x^2+x+1)$$

Aus welcher Gleichung ergibt: $A=0$, $B=4$, $C=4$, $D=-4$

Man hat demnach

$$\int \frac{4x^3}{(x^2+x+1)^2} \cdot dx = 4\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + 4\int \frac{x-1}{x^2+x+1} \cdot dx$$

Das erstere dieser beiden Integrale erster Form muss nach der Reductionsformel (B). behandelt werden um es bestimmen zu können; Man setze darin, indem man das Integral in die Form

$$= \int \frac{dx}{\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2}$$ bringt, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta^2 = \frac{3}{4}$; $m=2$,

so erfolgt $= \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$

$= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$; Man hat nun indem man einsetzt:

$$\int \frac{4x^3}{(x^2+x+1)^2} \cdot dx = \frac{4(2x+1)}{3(x^2+x+1)} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} + 4\int \frac{x-1}{x^2+x+1} \cdot dx$$

Fasst man die beiden letzten Integrale unter den gemeinschaftlichen Nenner zusammen, so ergibt sich

$$\frac{8}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} + 4\int \frac{(x-1)\cdot dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\frac{8}{3}+4x-4}{x^2+x+1} \cdot dx = \frac{4}{3}\int \frac{3x-1}{x^2+x+1} dx$$

Folglich: $\int \frac{4x^3}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{4(2x+1)}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3}\int \frac{3x-1}{x^2+x+1} \cdot dx$

welch letzteres Integral nach Formel $\underline{III}$ behandelt werden muss, da ..... $m=3$, $n=-1$, $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$

.... $b^2 - ac = \frac{1}{4} - 1$ also negativ ist

$$\int \frac{3x-1}{x^2+x+1} \cdot dx = \frac{3}{2} l(x^2+x+1) - \frac{1+\frac{3}{2}}{\sqrt{-\frac{1}{4}+1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{-\frac{1}{4}+1}} + C$$

$$= \frac{3}{2} l(x^2+x+1) - \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \text{Const.}$$

daher endlich $\int \frac{4x^3}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{4(2x+1)}{3(x^2+x+1)} + 2\, l(x^2+x+1) - \frac{20}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

Man habe noch: $\int \frac{x^3+3x}{(x^2+4x+8)(x+2)} \cdot dx$, Man zerfälle den Bruch unter dem Integralzeichen in Partialbrüche, so erhält man

$$\int \frac{x^3+3x}{(x^2+4x+8)(x+2)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8} \cdot dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{2} l(x+2) + \frac{1}{2}\int \frac{3x+4}{x^2+4x+8} \cdot dx$$

welches letztere Integral nach Formel III. giebt, da $m=3$, $n=4$, $a=1$, $b=2$, $c=8$ ist, $b^2-ac=4-8$, also negativ ist; daher:

$$\int\frac{3x+4}{x^2+4x+8}\cdot dx=\frac{3}{2}\,l(x^2+4x+8)+\frac{4-6}{\sqrt{4}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{\sqrt{4}}+C \text{ und also}$$

$$\int\frac{x^2+3x}{(x^2+4x+8)(x+2)}\cdot dx=\frac{3}{4}\,l(x^2+4x+8)-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{2}-\frac{1}{2}\,l(x+2)+C.$$

Integration der irrationalen Functionen

Für die Integration irrationaler Differential-Ausdrücke sind folgende Methoden anzuwenden, nämlich

1. daß man sie durch Einführung einer neuen Veränderlichen, wenn es möglich ist, in rationale Ausdrücke verwandelt und

2. daß man allgemeine Reductions Formeln aufstellt durch welche wenigstens eine Zurückführung einer complicirten Integrals auf ein einfacheres erreicht wird. Wie das erste Verfahren anzuwenden ist, sollen die folgenden Beispiele zeigen, welche einige der häufiger vorkommenden Integrale darstellen. — Man habe z. B.:

$\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot dx$; man setze: $x=z^2$, so ist: $dx=2z\cdot dz$

und man hat durch Substitution $\int\frac{1-z}{1+z}\,2z\cdot dz$

darum $\frac{(1-z)z}{1+z}=\frac{-z^2+z}{1+z}=-z+2+\frac{2}{z+1}$, so erhält man

$$2\int\frac{1-z}{1+z}\,z\cdot dz=\int\left(-2z+4+\frac{4}{z+1}\right)\cdot dz=-z^2+4z+4\,l(z+1)+C$$

und daher $\int\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot dx=-x+4\sqrt{x}+4\,l(1+\sqrt{x})+C$

Man habe ferner $\int\frac{x+\sqrt{1+x}}{2+x\sqrt{1+x}}\cdot dx$; Man setze hier $\sqrt{1+x}=z$ so ist $x=z^2-1$ und $dx=2z\,dz$, daher hat man nun:

$$\int\frac{z^2-1+z}{2+(z^2-1)z}\cdot 2z\cdot dz=2\int\frac{z^3+z^2-z}{z^3-z+2}\cdot dz$$

Da aber $\frac{z^3+z^2-z}{z^3-z+2}=1+\frac{z^2-2}{z^3-z+2}$, so erhält man das gegeb. Integral:

$$=2\int\left(1+\frac{z^2-2}{z^3-z+2}\right)\cdot dz=2z+2\int\frac{z^2-2}{z^3-z+2}\cdot dz$$

Es ist nun die cubische Gleichung $z^3-z+2=0$ aufzulösen, um alsdann den Bruch in Partialbrüche zu zerlegen und sodann die Integration zu beendigen, wodurch nach

Wiedereinsetzung von x die Aufgabe gelöst ist.
Allgemein kann man eine irrationale Funktion von der Form $\frac{ax^m+bx^n+\dots}{a_1x^{m_1}+b_1x^{n_1}+\dots}$ immer in rationale Form bringen, ob $m, n \dots m_1, n_1 \dots$ ganze oder gebrochene Zahlen sind.
Am häufigsten kommen irrationale Differenzial Ausdrücke vor, bei welchen unter dem Quadratwurzelzeichen ein Ausdr. vom 2ten Grad enthalten ist. – Als Beispiel soll dienen

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

Vor allem sind 2 Fälle zu unterscheiden nämlich, ob a positiv od. neg. ist.

1. a positiv. So hat man (siehe Einleitung)

$$\sqrt{ax^2+2bx+c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{x^2+2\beta x+\alpha}\text{, wenn } \frac{b}{a}=\beta \text{ u. } \frac{c}{a}=\alpha \text{ ist}$$

Man setze nun $x^2+2\beta x+\alpha=(z-x)^2=z^2-2zx+x^2$
daher $x=\frac{z^2-\alpha}{2(z+\beta)}$ und hieraus $dx=\frac{z^2+2\beta z+\alpha}{2(z+\beta)}\cdot dz$
Es folgt nun: $\sqrt{x^2+2\beta x+\alpha}=z-x=$

$$z-\frac{z^2-\alpha}{2(z+\beta)}=\frac{z^2+2\beta z+\alpha}{2(\beta+z)} \text{ daher}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{\frac{z^2+2\beta z+\alpha}{2(z+\beta)^2}}{\frac{z^2+2\beta z+\alpha}{2(z+\beta)}}\cdot dz=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dz}{z+\beta}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l(z+\beta)$$

und wenn x restituirt wird folgt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(x+\sqrt{x^2+2\beta x+\alpha}+\beta\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(\frac{ax+b}{a}+\frac{\sqrt{ax^2+2bx+c}}{\sqrt{a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+2bx+c}\right)+C$$

Man hat eigentlich $\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot l\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+2bx+c}\right)+C$
Man kann jedoch $-\frac{1}{\sqrt{a}}\,l\sqrt{a}$ zur Constanten machen.

2. a negativ.
Der Differenzialausdruck $\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ läßt sich in diesem Falle dadurch rational machen, daß man die Wurzeln der Gl. $ax^2+2bx+c=0$ aufsucht und den Quadraten der betreffenden linearen Wurzelfaktoren $=z^2$ setzt. (Einleitung)
Man gelangt jedoch auf folgende Weise viel schneller zum Ziel. – Es ist nämlich

$$\sqrt{ax^2+2bx+c}=\sqrt{-a}\cdot\frac{\sqrt{(b^2-ac-(ax+b)^2}}{a}\text{; folglich}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{a\,dx}{\sqrt{b^2-ac-(ax+b)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\,\frac{\left(\frac{a\,dx}{\sqrt{b^2-ac}}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)^2\right)}}$$

folglich nach Grundformel **IV** ist:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\arcsin\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} + \text{Const.}$$

Weil b^2-4c pos. od. neg. sein kann, könnten hier 2 Zeichen stattfinden; differenziirt man aber den Ausdruck auf der rechten Seite, (er muss alsdann dem unter dem Integralzeichen gleich sein) so wird man finden, dass nur das Zeichen − das richtige ist.)

Man soll den Ausdruck $\int dx\sqrt{ax^2+2bx+c}$ finden. Dieses Integral lässt sich für a positiv od. a negativ auf die beiden vorhergehenden Fälle zurückführen, wenn man die Methode der theilweisen Integr. anwendet, nach welcher

$\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$ ist.

Denn setzt man $v = x$ u. $u = \sqrt{ax^2+2bx+c}$ so erhält man

$$\int dx\sqrt{ax^2+2bx+c} = x\sqrt{ax^2+2bx+c} - \int x\frac{(2ax+2b)dx}{2\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

Da nun

$$\int\frac{ax^2+bx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx = \int\frac{ax^2+2bx+c-bx-c}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx =$$

$$\int dx\sqrt{ax^2+2bx+c} - \int\frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx$$ ist, so erhält man nach geschehener Substitution

$$2\cdot\int dx\cdot\sqrt{ax^2+2bx+c} = x\sqrt{ax^2+2bx+c} + \int\frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx$$

Und da ferner

$$\int\frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx = \frac{b}{a}\int\frac{ax+b-b+\frac{a}{b}\cdot c}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx$$

$$= \frac{b}{a}\int\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx + \frac{ac-b^2}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$ ist, so erhält man die folgende Reductionsformel.

$$\int dx\cdot\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c} + \frac{ac-b^2}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

1) Sei hierin 1) a positiv, so erhält man nach Einsetzung des Werthes des letztern Integrals

$$\int dx\cdot\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c} + \frac{ac-b^2}{2a\sqrt{a}}\cdot l\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+2bx+c}\right) + C$$

Beispiele. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. Hier ist a negativ, nämlich $= -1$, $b = -1$ u. $c = +1$, daher erhält man nach der obigen Formel

$$= -\arcsin\frac{-x-1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; hier ist $a = +1$, $b = 0$, $c = 1$ daher folgt

$$= l(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

- -

$\int dx\sqrt{1+x^2}$: hier haben wir ebenfalls $a=+1$, $b=0$, $c=1$ daher nach der Formel d. 2ten Falles:

$$\int dx\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}l(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

+ Bemerkg

+) Daß für a negativ das Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}$$

das negative Vorzeichen erhält liegt darin, daß man offenbar schreiben kann, wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{a}{\sqrt{b^2-ac-(ax+b)^2}}$$

und daß man den letzten Bruch sowohl mit $-\sqrt{b^2-ac}$ als auch $+\sqrt{b^2-ac}$ im Zähler u. Nenner dividiren kann, ohne daß der Nenner ein anderes Zeichen oder einen andern Werth erhielte (wegen der Quadratur). Indessen ist klar, daß man mit $-\sqrt{b^2-ac}$ dividiren muß, damit der daraus entstehende Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{-a}}\;\frac{-\frac{a}{\sqrt{b^2-ac}}}{\sqrt{1-\left(\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}\right)^2}}$$

dasselbe Zeichen habe, wie der gegebene.

$\frac{1}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ was in der That der Fall ist, weil a selber negativ ist.

Beispiel. $\int dx\sqrt{x^2-2x+4}$; hier ist a positiv u. $=1$ u. $b=-1$, $c=4$, daher erhält man

$$= \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+4} + \frac{3}{2}l(x-1+\sqrt{x^2-2x+4}) + C$$

$\int dx\sqrt{1-x-x^2}$; $a=-1$ also neg. $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$

daher folgt: $= \frac{2x+1}{4}\sqrt{1-x-x^2} + \frac{5}{8}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + \mathrm{const}$

$$= \frac{2x+1}{4}\sqrt{1-x-x^2} + \frac{5}{8}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}$; Man multiplicire den Zähler u. Nenner mit $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}$, so geht das Integr. über in:

$$= -\frac{1}{2}\int(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})dx$$ Nun ist

$\int dx\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}l(x+\sqrt{x^2-1})$; $(a=+1, b=0, c=-1)$

" $\int dx\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}l(x+\sqrt{x^2+1})$; $(a=+1, b=0, c=1)$

Folglich:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{4}\,l\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)+C$$

Schließlich mag auch noch bemerkt werden, daß sich auch die beiden Integrale

$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\cdot dx$ u. $\int (mx+n)\sqrt{ax^2+2bx+c}\cdot dx$ auf die eben gegebenen zurückführen lassen, denn bemerkt man, daß

$$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{m}{a}\,\frac{ax+b+\frac{an-bm}{m}}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \frac{m}{a}\,\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}+\frac{\frac{an-bm}{a}}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

ist, so sieht man leicht, daß der erste Theil unmittelbar integrirt werden kann, und daß sein Integral

$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}$ ist; Man hat nun

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}\,dx = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}+\frac{an-bm}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$ so

daß für a positiv, das ganze Integral

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}+\frac{an-bm}{a\sqrt{a}}\,l\left(\frac{ax+b}{\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+2bx+c}\right)+C$$

und für a negativ $= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+2bx+c}+\frac{bm-an}{a\sqrt{-a}}\,\operatorname{arc\,sin}\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}}+C.$

Und bemerkt man ferner, daß:

$(mx+n)\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{m}{a}\left(ax+b+\frac{an-bm}{m}\right)\sqrt{ax^2+2bx+c}$, so

erfolgt, wenn man integrirt u. wahrnimmt, daß

$\int (ax+b)\sqrt{ax^2+2bx+c}\cdot dx = \frac{1}{3}(ax^2+2bx+c)^{\frac{3}{2}}$, :

$$\int (mx+n)\sqrt{ax^2+2bx+c}\cdot dx = \frac{m}{3a}(ax^2+2bx+c)^{\frac{3}{2}}+\frac{an-bm}{a}\int dx\sqrt{ax^2+2bx+c}$$

wo das letzte Integral zu früher wieder dasselbe wieder die Unterscheidung nothwendig macht, ob a positiv od. neg. ist, wornach es alsdann nach der 3ten od. 4ten Formel ausgerechnet werden kann.

Man hab z. B. $\int \frac{dx}{x}\sqrt{x^4+1}$; Man setze $x^4+1=z^2$

so folgt. $x^4=z^2-1$, und wenn man logarith. diff.

$4\,lx = l(z^2-1)$ $\quad 4\frac{dx}{x}=\frac{2z\cdot dz}{z^2-1}$. daher:

$\frac{dx}{x}=\frac{z}{2(z^2-1)}\cdot dz$. Man hat daher.

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{x^4+1} = \int\frac{z^2}{2(z^2-1)}\cdot dz = \frac{1}{2}\int\frac{z^2\,dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-1}$$

Zerlegt man nun den Bruch $\frac{1}{z^2-1}$ in Partialbr.

Es erhält man:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)}$$ und man hat daher:

$$\int \frac{\partial x}{x}\sqrt{x^4+1} = \frac{1}{4} l(z+1) - \frac{1}{4} l(z-1) + \frac{1}{2} z$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{1}{4} l\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{4} l\frac{1+\sqrt{x^4+1}}{-1+\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + \frac{1}{4} l\frac{\sqrt{x^4+1}+1}{\sqrt{x^4+1}-1} + Const.$$

Der Repraesentant der vorhergehenden Beispiele ist das Integral $\int\frac{\partial x}{x}\left(\frac{ax^n+b}{a_1x^n+b_1}\right)^{\frac{p}{q}}$. Es läßt sich dasselbe finden, wenn auch p, q u. n für ganze Zahlen seien. Setzt man

$$\frac{ax^n+b}{a_1x^n+b_1} = z^q,$$ so ergibt sich $x^n = \frac{b_1z^q-b}{a_1z^q-a}$

und nimmt man logarithm. Differenziert.

$$n l x = l(b_1z^q-b) - l(a_1z^q-a)$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{q}{n}\left(\frac{b_1z^{q-1}}{b_1z^q-b} - \frac{a_1z^{q-1}}{a_1z^q-a}\right)\partial z$$

Das gegebene Integral geht also über in

$$\int\frac{\partial x}{x}\left(\frac{ax^n+b}{a_1x^n+b_1}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{n}\int z^p\left(\frac{b_1z^{q-1}}{b_1z^q-b} - \frac{a_1z^{q-1}}{a_1z^q-a}\right)\partial z$$

$$= \frac{q}{n}\int\left(\frac{b_1z^{p+q-1}}{b_1z^q-b} - \frac{a_1z^{p+q-1}}{a_1z^q-a}\right)\partial z$$

welcher Ausdruck unmittelbar integrirt werden kann. 36.

Man habe $\Delta = \int\frac{\partial x}{x}\sqrt[3]{x^3+1}$. Man setze $x^3+1=z$ also $x^3=z-1$ u.

$3lx = l(z-1)$; daher $\frac{\partial x}{x} = \frac{1}{3}\frac{\partial z}{z-1}$; das gegebene Integral geht folglich über in

$\Delta = \frac{1}{3}\int\frac{\partial z}{z-1}\sqrt[3]{z}$ man setze nun $z=t^3$, so ist $\partial z = 3t^2\partial t$ und daher $\Delta = \int\frac{t^3}{t^3-1}\partial t = t + \int\frac{\partial t}{t^3-1}$, was unmittelbar integrirt werden kann. Substituirt man alsdann und drückt alles wieder durch x aus, so ist die Aufgabe gelöst.

Es gibt noch einige besondere Fälle, die sich unmittelbar integriren lassen, obschon darin irrationale

irrationale Ausdrücke, die aus Wurzeln vom höh. Grade, als dem zweiten, bestehen, dann Radicale ebenfalls höher, als vom 2t Grade sind vorkommen.

1. Man habe

$$\int x^{n-1}\sqrt{ax^{2n}+2bx^n+c}\,.\,dx$$

Setzt man hierin $x^n=z$, so folgt $x^{n-1}.dx=\frac{1}{n}dz$ u. daher geht das gegebene Integral über in

$\frac{1}{n}\int dz\sqrt{az^2+2bz+c}$, was sich nach dem frühern unmittelbar integriren läßt.

2. Man habe $\int(ax+b+\sqrt{a}\sqrt{ax^2+2bx+c})^n.dx$

Dieses Integral läßt sich finden, was auch n sei, denn setzt man:

$$ax+b+\sqrt{a}\sqrt{(ax^2+2bx+c)}=z.$$

u. bringt man den rationalen Theil der linken Seite der Gleichung auf die rechte u. quadrirt alsdann, so erhält man

$$a(ax^2+2bx+c)=(z-(ax+b))^2$$
$$=z^2+a^2x^2+b^2-2axz-2bz+2abx$$

woraus folgt: $x=\frac{z^2-2bz+b^2-ac}{2az}$ u. daher

$$dx=\frac{z^2-b^2+ac}{2az^2}.dz.$$

Substituirt man nun, so erhält man für das gegebene Integral.

$$\int z^n\frac{z^2-b^2+ac}{2az^2}.dz=\frac{1}{2a}\int z^n.dz+\frac{ac-b^2}{2a}\int z^{n-2}.dz$$
$$=\frac{1}{2a}\cdot\frac{z^{n+1}}{n+1}+\frac{ac-b^2}{2a}\cdot\frac{z^{n-1}}{n-1}+C.$$

Einer der wichtigsten Fälle, auf welchen sich viele andere zurückführen lassen, stellt folgendes Integ. dar.

$$\int x^m(ax^n+b)^p.dx.$$

worin n als eine ganze positive Zahl angesehen wird und wie wir bald sehen werden, als solche angesehen werden kann. — Der Ausdruck unter dem Integral-Zeichen hat den wenig passenden Namen der binomischen Differentiale. Dieses Integral umfaßt fast alle Fälle, die gewöhnlich vorkommen, ist aber nur in den meisten Fällen in endlicher Form gefunden, in welcher sich das binomische Differential rational machen u. somit auch integriren läßt. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß es noch andere Fälle gibt. Diese Methode. Die rationale Transformation hängt natürlich von gewissen Beziehungen und Werthen der Exponenten m, n u. p ab.

I. Es sei p eine ganze positive Zahl.
Wenn man entwickelt das Binom, so wird man eine endliche Anzahl von Gliedern erhalten, welche mit x^m multiplicirt sich sogleich integriren lassen, was auch m u. n seien.
Man hat z.B. $\int x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{2}}+1)^3 dx$

da $(x^{\frac{1}{2}}+1)^3 = x^{\frac{3}{2}}+3x+3x^{\frac{1}{2}}+1$, so ist

$$x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{2}}+1)^3 = x^{\frac{13}{6}}+3x^{\frac{5}{3}}+3x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$$

und wenn man nun jedes Glied für sich integrirt folgt

$$\int x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{2}}+1)^3 dx = \frac{6x^3\sqrt[6]{x}}{19}+\frac{9x^2\sqrt[3]{x^2}}{8}+\frac{18x^2\sqrt[6]{x}}{13}+\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}$$
$$=6x^2\sqrt[6]{x}\cdot\left\{\frac{x}{19}+\frac{3}{13}\right\}+3x\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3x}{8}+\frac{1}{5}\right)+C$$

II. Es sei $m=n-1$. Das bin. Differential ist dann

$$x^{n-1}(ax^n+b)^p dx.$$

und dieses läßt sich, was auch dabei p sein mag, nach der ersten Grundform finden. Man erhält nämlich nach derselben.

$$\int x^{n-1}(ax^n+b)^p dx = \frac{1}{na}\cdot\frac{(ax^n+b)^{p+1}}{p+1}+C.$$

z.B.

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{3}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}} = \frac{3(1+\sqrt{x})^{\frac{4}{3}}}{2}+C$$

III. Durch Einführung einer neuen Veränderlichen

$$z = ax^n+b$$

erhält man eine Bedingung, welcher die Exponenten m und n genügen müssen, damit das Differential nach z rational wird.
Da man aus Obigem erhält

$x = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ u. daher $x^m = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$ und

$dx = \frac{1}{na}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz$, so folgt, wenn man substituirt:

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{na}\int\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} z^p\left(\frac{z-b}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}} dz$$

$$= \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int z^p(z-b)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dz\,.$$

Dieses Integral läßt sich nun auf die vorhergehende Weise entwickeln, wenn der Exponent $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl ist. Hieraus ergibt sich also der Satz:

Wenn eines binomischen Differentials der Exponent außerhalb der Parenthese, vermehrt um 1, u. dividirt durch den Exponent innerhalb derselben, eine ganze positive Zahl ist, so ist der Ausdruck integrabel.

Zb. Man habe

$$\int x^3\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$$

Da hier $m=3$, $n=2$ ist, so ist $\frac{m+1}{n}=+2$. Man setze $x^2+1=z$, so erhält man $x=\sqrt{z-1}$ u. $dx=\frac{dz}{2\sqrt{z-1}}$

folglich $\int x^3\sqrt[3]{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{3}}(z-1)\,dz = \frac{1}{2}\int z^{\frac{4}{3}}dz - \frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{3}}dz$

Oder: $\int x^3\sqrt[3]{x^2+1}\,dx = \frac{3}{14}z^2\sqrt[3]{z} - \frac{3}{8}z\sqrt[3]{z} + C$

$$= \frac{3z\sqrt[3]{z}}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+C$$

IV. Schreibt man das binomische Differential in der Form:

$$x^m(ax^n+b)^p\,dx = x^{m+np}(a+bx^{-n})^p\,dx.$$

und nimmt man den in III gefundenen Satz zu Hülfe, wonach der um 1 vermehrte Exponent außerhalb der Parenthese dividirt durch den Exponenten innerhalb derselben eine ganze positive Zahl geben muß, so findet man eine neue Bedingung der Integrabilität, nämlich:

$-\frac{m+np+1}{n}$ od. $-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ eine ganze positive Zahl ist. Zb.

Man habe $\Delta = \int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x^2}\sqrt[6]{x^2-1}} = \int x^{-\frac{8}{3}}(x^2-1)^{-\frac{1}{6}}dx$

so ist $m=-\frac{8}{3}$, $n=2$, $p=-\frac{1}{6}$, $a=1$, $b=-1$, u. ist also $-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)=+1$. Folglich läßt sich das

Integral, so stellen, daß man es unmittelbar in-
tegriren kann.

Man setze zu diesem Zweck $z = 1 - \frac{1}{x^2}$, so ist $x = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$ u. $dx = \frac{1}{2}(1-z)^{-\frac{3}{2}}.dz$. Substituirt man nun, so erhält man

$$\Delta = \frac{1}{2}\int (1-z)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{6}}(1-z)^{-\frac{3}{2}}.dz = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{6}}dz$$

$$= \frac{3}{5}.z^{\frac{5}{6}} + C = \frac{3}{5}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{\frac{5}{6}} + C$$

Wenn in den beiden Fällen III u. IV die Zahlen $\frac{m+1}{n}$ u. $-\left\{\frac{m+1}{n}+p\right\}$ zwar ganze, aber nicht positive Zahlen sind, so liefern die angeführten Substitutionen kein unmittelbar auszuführendes Integral. Sie führen vielmehr zu Formen, welche man durch eine neue Substitution rational machen muß u. wie wir zeigen wollen, sich auch rational machen kann.

ad. III. Es sei $p = \frac{u}{v}$ wobei u u. v ganze Zahlen seien. Man setze $ax^n + b = y^v$, so folgt

$$x = \left(\frac{y^v - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ und } dx = \frac{v}{na}.y^{v-1}\left(\frac{y^v - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}.dy$$

Setzt man diese Ausdrücke in das Integral ein, so erhält man folgende allgemeine Reductionsformel

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{u}{v}}.dx = \frac{v}{na^{\frac{m+1}{n}}}\int (y^v - b)^{\frac{m+1}{n}-1}y^{u+v-1}dy$$

woraus klar hervorgeht, daß damit das Differential integrabel sei, es nothwendig u. hinreichend sei, daß $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive od. negative Zahl ist.

Z.B. Man habe

$$\Delta = \int \frac{dx}{x^4}\sqrt{x^3+1}.$$ Hier ist

$m = -4$, $n = 3$, $u = 1$, $v = 2$ also $\frac{m+1}{n} = -1$

Man setze $x^3 + 1 = y^2$, so erhält man

$$\Delta = \frac{2}{3}\int (y^2-1)^{-2}y^2.dy = \frac{2}{3}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}.dy$$

Zerlegt man nun den Bruch unter dem Integralzeichen in Partialbrüche, so erfolgt

$$\frac{y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{y-1}\right)$$

Daher, wenn man integrirt

$$\Delta = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{y+1} - l(y+1) - \frac{1}{y-1} + l(y-1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(l\frac{y-1}{y+1} - \frac{2y}{y^2-1}\right) + C$$

Und setzt man x wieder ein, endlich

$$\int\frac{dx}{x^4}\sqrt{x^3+1} = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{(x^3+1)}-1}{\sqrt{(x^3+1)}+1} - \frac{2\sqrt{(x^3+1)}}{x^3}\right)+C$$

ad. IV. Man setze $ax^n+b = x^n z^v$, $p=\frac{u}{v}$, so folgt

$$x = \left(\frac{z^v-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}} \text{ und } dx = -\frac{b^{-1}v}{n}\left(\frac{z^v-a}{b}\right)^{-\frac{1}{n}-1}\cdot z^{v-1}\,dz$$

u, wenn man nun Alles durch z ausdrückt, erhält man

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{u}{v}}dx = -\frac{v}{n}\cdot b^{\frac{m+1}{n}+\frac{u}{v}}\int\frac{z^{u+v-1}\,dz}{(z^v-a)^{\frac{m+1}{n}+\frac{u}{v}+1}}$$

Es ist klar, daß, wenn nur überhaupt nur $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{v}$ nur eine ganze positive od. negative Zahl ist, das transformirte Integral immer, als ein rationales gefunden werden kann.

z.b. Man habe:

$$\Delta = \int\frac{dx}{x^4\sqrt{x}}\sqrt[6]{1+x^3}\text{; hier ist } m=-\frac{9}{2} \quad u=1 \quad n=3 \quad v=6$$

Also $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{v} = -1$, das transformirte Integral ist nun

$$\Delta = -2\int\frac{z^6\,dz}{(z^6-1)^0} = -\frac{2}{7}z^7 = -\frac{2}{7}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{7}{6}}+C$$

~~Man habe ferner~~

$$\cancel{\Delta = -2\int\frac{z^6\,dz}{(z^6-1)^0} = -\frac{2}{7}z^7 = -\frac{2}{7}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{7}{6}}+C}$$

Man habe ferner $\Delta = \int\frac{dz}{x^2\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(1+x^5)^5}}$ hier ist

$m=-\frac{8}{3}$ $u=-5$ daher $\frac{m+1}{n}+\frac{u}{v} = -2$
$n=5$ $v=+3$

Transformirt man das Integral nun, so ergibt sich

$$\Delta = -\frac{3}{5}\int\frac{z^{-3}dz}{(z^3-1)^{-1}} = -\frac{3}{5}\left(z+\frac{1}{2z^2}\right) = -\frac{3}{10}\cdot\frac{3x^5+2}{x^5\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x^5})}^{2}}+C$$

Auch die Form des binomischen Differentials lassen sich noch einige andere Ausdrücke zurückführen, wovon wir die folgenden 3 aufführen wollen.

1° $\int x^q(ax^r+bx^s)^p\,dx$

Multiplicirt man den Ausdruck unter dem Integral mit x^{-sp}, so erhält man

$$\int x^{sp+q}(ax^{r-s}+b)^p\,dx$$

Dieser Integral wird sich rational machen lassen, wenn $\frac{ps+q+1}{r-s}$ oder, wenn $\frac{ps+q+1}{r-s}+p$ eine ganze

Zahl ist.

2°) $\Delta = \int x^q (ax^{2n}+2bx^n+c)^p . dx$

Man setze $x^n = z+h$

so ist $ax^{2n}+2bx^n+c = a(z+h)^2+2b(z+h)+c$

$$= az^2+2(ah+b)z+ah^2+2bh+c$$

Bestimmt man nun h dergestalt, daß $ah+b=0$ wird, wo also $h=-\frac{b}{a}$ sein muß, so geht das Binom über in

$$az^2+\frac{b^2}{a}-\frac{2b^2}{a}+c = az^2+\frac{ac-b^2}{a}$$

Ferner ist $x=(z-\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ also $dx=\frac{1}{n}(z-\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}-1} . dz$

daher, wenn man einsetzt, erfolgt

$$\Delta = \frac{1}{n}\int (z-\frac{b}{a})^{\frac{q+1}{n}-1} . (az^2+\frac{ac-b^2}{a})^p . dz$$

Ist nun $\frac{q+1}{n}-1$ eine ganze positive Zahl, so läßt sich der erste Factor in endlicher Reihe entwickeln und es entstehen daraus ebensoviele binom. Differentiale, als jene Entwicklung Glieder enthält. Ist außerdem noch p von der Form $k+\frac{1}{2}$, wobei k irgend eine ganze Zahl ist, so ist das Integral unter allen übrigen Umständen findbar

3°) $\Delta = \int (ax+b)^p (\alpha x+\beta)^{\frac{u}{v}} . dx$

Setzt man $\alpha x+\beta = z^v$, so geht das Integral über in

$$\Delta = \int (a.\frac{z^v-\beta}{\alpha}+b)^p . z^u \frac{v.z^{v-1}}{\alpha} . dz$$

$$= \frac{v}{\alpha^{p+1}}\int z^{u+v-1}(az^v+\alpha b-a\beta)^p . dz$$

welches Integral durch die frühere Substitution rational wird, wenn entweder $\frac{u+v}{v}$ od. $\frac{u+v}{v}+p$ eine ganze Zahl ist

Formeln für die Reduction der binom. Differentiale

Diese Formeln dienen dazu die Exponenten in ihrem absoluten Werthe zu verkleinern. Man verbindet dabei die Absicht. 1. das Integral, wenn es in endlicher Form darstellbar ist, selbst zu erhalten, und es durch Reihen näherungsweise berechnen zu können, als 2. wenn es in endlicher Form nicht dargestellt werden kann, dasselbe doch so zu reduciren, daß das übrig bleibende Integral auf die einfachste Form zurückgeführt und dann leichter dargestellt werden kann.

Da offenbar

$$x^m(ax^n+b)^p = x^{m-n+1}\cdot(ax^n+b)^p x^{n-1},$$ so ergibt sich

wenn man partiell integrirt und in der allgem. Formel $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ setzt $u = x^{m-n+1}$ und $dv = (ax^n+b)^p\cdot x^{n-1}\cdot dx$, so folgt:

$$du = (m-n+1)x^{m-n} \text{ und } v = \frac{(ax^n+b)^{p+1}}{na(p+1)}$$ und

man hat daher

E) $$\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{na(p+1)} - \frac{m-n+1}{n\cdot a(p+1)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^{p+1}\cdot dx$$

Durch diese Formel werden beide Exponenten m und p verändert; Will man jedoch die Reductionsformel haben durch welche nur der Exponent des x außerhalb der Klammer verändert u. jener der ~~partiell~~ Parenthese unverändert bleibt, so bemerke man, daß

$$x^{m-n}(ax^n+b)^{p+1} = x^{m-n}(ax^n+b)^p(ax^n+b)$$
$$= ax^m(ax^n+b)^p + bx^{m-n}(ax^n+b)^p$$

Integrirt man nun, so folgt

$$\int x^{m-n}\cdot(ax^n+b)^{p+1}\cdot dx = a\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx + b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\cdot dx$$

Setzt man in die Formel E) dieses Integral ein so erhält man, wenn man noch das erstere der beiden Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichg auf die linke bringt

$$\left(1+\frac{m-n+1}{n(p+1)}\right)\cdot\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{na(p+1)} - \frac{b(m-n+1)}{n\cdot a(p+1)}\times$$
$$\times\int x^{m-n}\cdot(ax^n+b)\cdot dx.$$ und, da

$$1+\frac{m-n+1}{n(p+1)} = \frac{m+np+1}{n(p+1)},$$ so ergibt sich, wenn mit diesem Faktor auf der andern Seite hinüber dividirt wird.

$$\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{a(m+np+1)} - \frac{b(m-n+1)}{a(m+np+1)}\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\cdot dx$$

Man habe z.B. $\Delta = \int x^2\sqrt{1-x^2}\cdot dx$, so ist in binom. Differential $m=2,\ n=2\ \ a=-1\ \ b=1$ u. $p=\frac{1}{2}$ daher nach Formel A, $\Delta = \frac{x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{-4} + \frac{1}{4}\int dx\sqrt{1-x^2} =$

$$\frac{1}{4}\left(x(x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \int dx\sqrt{1-x^2}\right)$$

Und da $\int dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$ (nach der früher gefundenen Formel

$$\int dx\sqrt{ax^2+2bx+c} = \frac{ax+b}{2a}\sqrt{ax^2+2bx+c} + \frac{b^2-ac}{2a\sqrt{-a}}\cdot\arcsin\frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} + C,$$

welche für a negativ gilt; ist hier $a=-1$, $b=0$, $c=1$), so folgt, wenn man einsetzt

$$S = \frac{1}{4}\left(x(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)+C$$

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\cdot dx = \frac{1}{8}\left((2x^3-x)\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C$$

Man habe ferner

$$\Delta = \int x^3\sqrt{1+x^3}\cdot dx$$

In diese (A) Formel ist hier $m=3$, $n=3$ $a=b=1$, $p=\frac{1}{2}$, daher

$$\Delta = \frac{2x(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{11} - \frac{2}{11}\int dx\sqrt{x^3+1}$$

$$\int x^3\sqrt{1+x^3}\cdot dx = \frac{2}{11}\left((x^3+1)\sqrt{x^3+1} - \int dx\sqrt{x^3+1}\right)$$

welches letztere Integral sich nicht in endlicher Form finden läßt, aber einfacher ist, als das gegebene.

Man habe noch $\Delta = \int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

so läßt sich dieses Integral finden. Da $\frac{m+1}{n}+p=1$ ($m=3$, $n=3$, $a=b=1$, $p=-\frac{1}{3}$) daher, wenn man diese Werthe in (A) einsetzt erhält man

$$\Delta = \frac{x(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}{3} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

Da nun

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^{-3}}},$$

so setze man $1+x^{-3}=z^3$, woraus man erhält $x^{-3}=z^3-1$, daher $-3lx = l(z^3-1)$ $\frac{dx}{x} = -\frac{z^2dz}{z^3-1}$ und man hat also dann, wenn man einsetzt.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = -\int\frac{z\,dz}{z^3-1}$$

Zerlegt man nun den Bruch $\frac{z}{z^3-1}$ in Partialbrüche so erhält man

$$\frac{z}{z^3-1} = \frac{z}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{z-1}{z^2+z+1}\right)$$

und, wenn man integrirt

$$\int\frac{z}{z^3-1}\cdot dz = \frac{1}{3}\left(l(z-1) - \int\frac{(z-1)\cdot dz}{z^2+z+1}\right).$$

Dann ist noch

$$\int\frac{z-1}{z^2+z+1}\cdot dz=\frac{1}{2}l(z^2+z+1)-\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$ nach

der Formel $$\int\frac{mx+n}{ax^2+2bx+c}\cdot dx=\frac{m}{2a}l(ax^2+2bx+c)+\frac{an-bm}{a\sqrt{ac-b^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}$$, welche

für $b^2-ac<0$ gilt u. wenn hier zu setzen ist $m=1$, $n=-1$, $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=1$.

Substituirt man den Werth dieses Integrals in die vorige Gleichung so ergibt sich

$$\int\frac{z}{z^3-1}\cdot dz=\frac{1}{3}\left(l(z-1)-\frac{1}{2}l(z^2+z+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Und da $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}=-\int\frac{z\cdot dz}{z^3-1}$, so erfolgt, wenn man in dem letzteren Integrale x wieder einsetzt

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}l\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}{x^2}-l\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}-1\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2\sqrt[3]{x^3+1}}{x\sqrt{3}}\right)+C$$

Und daher endlich

$$A\quad\int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\frac{x\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{3}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}l\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}{x^2}-l\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}-1\right)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2\sqrt[3]{x^3+1}}{x\sqrt{3}}\right)+C$$

°) Soll der Exponent p der Parenthese um eine Einheit vermindert werden dagegen der Exponent m unverändert bleiben, so gelangt man zu der entsprechenden Reduktionsformel auf folgende Weise: Man setze in der Formel E, p für p+1 und bringe das Integral rechter Hand ~~dagegen~~ auf die linke Seite dagegen das linker Hand auf die rechte, so wird sich ergeben:

$$\frac{m-n+1}{n\cdot a\cdot p}\cdot\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\cdot dx=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^p}{n\cdot a\,p}-\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\cdot dx$$

$$\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\cdot dx=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^p}{m-n+1}-\frac{n\,a\,p}{m-n+1}\cdot\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\cdot dx$$

Setzt man endlich diesen Werth des Integrals $\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\cdot dx$ in die Formel A ein u. reducirt, so erhält man:

$$\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+np+1}+\frac{b\,n\,p}{m+np+1}\cdot\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\cdot dx\quad\cdot B.$$

Man habe z. B.

$$\int dx\,\sqrt{1-x^2} \quad \text{hier ist } m=0,\ n=2,\ p=\tfrac{1}{2},\ a=-1,\ b=+1$$

Daher nach obiger Formel

$$\int dx\,\sqrt{1-x^2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\, x + C$$

Man habe ferner $\int dx\,\sqrt[3]{(1+x^2)^2}$. hier ist $m=0,\ n=2,\ p=\tfrac{2}{3},\ a=1,\ b=1$

Daher nach Formel B

$$\int dx\,\sqrt[3]{(1+x^2)^2} = \frac{3x\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}{7} + \frac{4}{7}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

3°) Wenn der Exponent m negativ ist, so liefert die Formel A kein einfacheres Integral; um nun für diesen Fall eine Reductionsformel zu erhalten, kehrt man die Formel A um, so findet man

$$\int x^{m-n}(ax^n+b)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{b(m-n+1)} - \frac{a(m+np+1)}{b(m-n+1)}\int x^m(ax^n+b)$$

Man setze hierin $m-n=-m_1$, also $m=-m_1+n$ und nach geschehener Substitution setze man wieder m statt m_1, so wird man erhalten

C) $$\int x^{-m}(ax^n+b)^p.dx = -\frac{x^{-m+1}(ax^n+b)^{p+1}}{b(m-1)} + \frac{a(-m+n+np+1)}{b(m-1)}\int x^{-m}(a\ldots$$

Z. B. Man habe

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} \quad \text{hier ist } m=4,\ n=2,\ p=-\tfrac{1}{2},\ a=-1,\ b=+1$$

daher, wenn man in obige Formel substituirt

$$\int x^{-4}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

Nach derselben Formel ist (wobei jedoch $m=2$ ist)

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{daher}$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}(1+2x^2) + \text{Const.}$$

Man habe ferner $\int\frac{dx}{x^7}\sqrt{x^3+1}$, so ist $m=7,\ n=3,\ p=\tfrac{1}{2},\ a=1,\ b=1$

daher $$\int x^{-7}\sqrt{x^3+1}.dx = -\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{6x^6} - \frac{1}{4}\int x^{-4}\sqrt{1+x^3}.dx$$

Wiederholt man die Operation, indem man nun $m=4$ setzt, so erfolgt

$$\int x^{-4}\sqrt{x^3+1}.dx = -\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}\sqrt{x^3+1}$$

Setzt man in diesem letzteren Integral $1+x^3=z^2$, so folgt daraus $x^3=z^2-1$, daher, wenn man logarithmisch differenziert

$$3\log x = l(z^2-1)\,;\quad \frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2z\,dz}{z^2-1},$$ man erhält folglich, wenn man einsetzt:

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{1+x^3}=\frac{2}{3}\int\frac{z^2\cdot dz}{z^2-1}=\frac{2}{3}z+\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2-1}$$

Zerfällt man den Bruch unter dem Integralzeichen nun in Partialbrüche, so wird sich ergeben

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{2(z-1)}$$ daher

$$\int\frac{dx}{x}\sqrt{1+x^3}=\frac{1}{3}\,l\,\frac{z+1}{z-1}+\frac{2}{3}z=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{3}\,l\,\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}-1}$$

Und folglich $$\int x^{-4}\sqrt{x^3+1}\cdot dx=-\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+\frac{1}{6}\,l\,\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}-1}+\frac{1}{3}\sqrt{x^3+1}$$

daher endlich

$$\int\frac{dx}{x^7}\sqrt{x^3+1}=-\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}{6x^3}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{24}\,l\,\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^3+1}$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{x^3-2}{x^6}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x^3+1}-\frac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{x^3+1}+1}{\sqrt{x^3+1}-1}\right)+C$$

4°. Soll der Exponent m unverändert bleiben, p aber um 1 vermehrt werden, so gelangt man zu der entsprechenden Reductionsformel wenn man die Formel B umkehrt; man hat alsdann nämlich

$$\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\cdot dx=-\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{bnp}+\frac{m+np+1}{bnp}\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx$$

Setzt man nun hierin $p-1=-p$, also $p=1-p$, und läßt nach geschehener Substitution den Accent weg, so erhält man unmittelbar.

D) $$\int x^m(ax^n+b)^{-p}dx=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{-p+1}}{bn(p-1)}-\frac{m+n+1-np}{bn(p-1)}\int x^m(ax^n+b)^{-p+1}\cdot dx$$

Man habe z.B. $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, was sich auch auf folgende Art schreiben läßt $=\int dx\,(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Man setze in obiger Formel $m=0$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$, $a=-1$, $b=1$; so erhält man

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Man habe ferner

$$A=\int\frac{dx}{x(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2}}=\int x^{-1}(1+x^2)^{-\frac{4}{3}}\cdot dx$$

Man setze in der Formel D, $m=-1$, $n=2$, $p=\frac{4}{3}$, $a=1$, $b=1$ so ist

$$\Delta = \frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} + \int \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

Man setze nun $1+x^2=z^3$, so ergibt sich $x^2=z^3-1$; Differenziirt man logarithmisch, so erhält man $\frac{\partial x}{x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{z^2\cdot\partial z}{z^3-1}$. Es ist daher, wenn man substituirt wird

$$\int\frac{\partial x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{3}{2}\int\frac{z}{z^3-1}\cdot\partial z,$$

welches Integral sich leicht nach dem früheren finden läßt

5°) Um m zu vermindern u. gleichzeitig p zu vermehren dient die oben schon gefundene Formel E, welche heißt.

$$E)\ \int x^m(ax^n+b)^{-p}\partial x = -\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{-p+1}}{an(p-1)} + \frac{m-n+1}{an(p-1)}\cdot\int x^{m-n}(ax^n+b)^{-p+1}\partial x$$

Beisp. Man habe $\Delta=\int\frac{x^3\cdot\partial x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, so setze man in der Formel $m=3$, $n=2$, $p=\frac{3}{2}$, $a=-1$, $b=1$; dann wird sich ergeben

$$\Delta = \frac{x^2}{5\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{5}\int\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

da nun $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, so erhält man endlich, wenn man substi.

$$\Delta = \int \frac{x^3\cdot\partial x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x^2}{5\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{5}\sqrt{1-x^2}+C.$$

Man habe ferner $\Delta = \int\frac{x^7\cdot\partial x}{\sqrt{(x^4+1)^3}}$

$m=7$, $n=4$, $p=\frac{3}{2}$ $a=b=1$

$$\Delta = -\frac{x^4}{10\sqrt{x^4+1}} + \frac{2}{5}\int\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\cdot\partial x.$$

Und da $\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4+1}$

so folgt $\Delta = -\frac{x^4}{10\sqrt{x^4+1}} + \frac{1}{5}\sqrt{x^4+1}+C$

Auf ähnliche Weise lassen sich die beiden Integrale

$$\int\frac{x^4\partial x}{\sqrt[4]{(x^4+1)^3}} \text{ und } \int\frac{x^2\partial x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

behandeln u. zwar läßt sich das erste Integral auf die Form $\int\partial x\sqrt[4]{x^4+1}$ u. das zweite auf $\int\partial x\sqrt[3]{x^2+1}$ bringen.

6°) Um m zu vermehren u. p zu vermindern hat man aus Formel E

$$\int x^{m-n}(ax^n+b)^{p+1} = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1}}{m-n+1} - \frac{an(p+1)}{m-n+1}\int x^m(ax^n+b)^{p+1}$$

Man setze $m-n=-m$, und $p+1=p$, und lasse nach geschehener Substitution die Accente weg, so ergibt sich

$$F,\quad \int x^{-m}(ax^n+b)^p = -\frac{x^{-m+1}(ax^n+b)^p}{m-1} + \frac{anp}{m-1}\int x^{-m+1}(ax^n+b)^{p-1}\cdot dx$$

Die folgenden Beispiele dienen zur Erläuterung, nämlich, daß

$$\int\frac{dx}{x^3(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}},$$ sich auf $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{x^2+1}}$ und die

folgenden 2 Integr. nämlich $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^4+1}}$ u. $\int\frac{dx}{x^2(1-x^2)\sqrt[3]{1-x^2}}$

sich beziehungsweise auf $\int dx\sqrt{x^4+1}$ u. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ bringen lassen. –.

Es lassen sich noch zwei Reductions-Formeln ableiten, durch welche m u. p vermehrt werden können. Aus dem bisherigen geht hervor daß sich unter allen Umständen das Integral der binomischen Differentials auf ein anderes reduciren läßt, in welchem der Zahlenwerth der Exponenten von $x < n$, u. jener des Exponenten der Parenthese < 1 ist.

Wenn man die Formel A, r mal anwendet so wird man haben, indem man m in der Formel A überall $m-(r-1)n$ gesetzt:

$$\int x^{m-(r-1)n}(ax^n+b)^p\cdot dx = \frac{x^{m-nr+1}(ax^n+b)^{p+1}}{a(m-(r-1)n+np+1)} -$$

$$-\frac{b(m-nr+1)}{a(m-(r-1)n+np+1)}\int x^{m-nr}(ax^n+b)^p\cdot dx$$

Soll die Operation mit der r^{ten} abbrechen, so ist nöthig, daß der Zähler des Coefficienten null sei, nämlich $m-nr+1=0$ oder daß $\frac{m+1}{n}=r$ eine ganze Zahl sei, was die alte Bedingung der Integrabilität ist. Ist also $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl, so läßt sich das binomische Differenzial nur durch algebr. Functionen finden.

Die Formel wird aber bei der r^{ten} Wiederholung unbrauchbar, wenn der Nenner $m-(r-1)n+np+1=0$ wird oder wenn $\frac{m+1}{n}+p=r-1$ eine ganze positive Zahl wird, was die zweite Bedingung der Integrabilität ist.

In diesem Falle läßt sich das Integral nicht algebraisch darstellen, aber, kann bekannt in rationale Form bringen u. dann ~~wird~~, die Logarithmen u. Bogen ausführen.

Aehnliche Bemerkungen gelten für die Form B. Häufig kommen die folgenden 5 speziellen Fälle in Anwendung, die sich aus den allgem. Reductionsformeln ergeben, nämlich:

1. $\int \frac{x^m \cdot \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \Delta$; Man setze in A. $p=\frac{1}{2}$ $n=2$ $a=-1$ $b=+1$; so Man

$$\Delta = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \partial x$$

2. $$\int \frac{x^m}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \partial x = \frac{x^{m-1}\sqrt{1+x^2}}{m} - \frac{m+1}{m}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \partial x$$

3. $\Delta = \int \frac{\partial x}{x^m\sqrt{1-x^2}}$; Man setze in C. $n=2$ $p=-\frac{1}{2}$ $a=-1$ $b=1$, so ist

$$\Delta = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{\partial x}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}$$

4. $$\int \frac{\partial x}{x^m\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{m-2}{m+1}\int \frac{\partial x}{x^{m-2}\sqrt{1+x^2}}$$

5; $\Delta = \int \frac{\partial z}{((z-\alpha)^2+\beta^2)^p}$; Man setze $\frac{z-\alpha}{\beta} = x$

so ist $\Delta = \frac{1}{\beta^2(p-1)} \int \frac{\partial x}{(x^2+1)^p}$; setzt man nun in D. $m=0$, $n=2$, $a=b=1$, $p=p$, so erfolgt

$$\int \frac{\partial x}{(x^2+1)^p} = \frac{x}{2(p-1)(x^2+1)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)}\int \frac{\partial x}{(x^2+1)^{p-1}}$$

Setzt man nun für x seinen Werth $\frac{z-\alpha}{\beta}$ u. die Formel anwendet u. dividirt alsdann durch den Factor $\beta^2(p-1)$, so ergibt sich schließlich

$$\Delta = \frac{\;}{2(p-1)\beta^2} \cdot \frac{z-\alpha}{((z-\alpha)^2+\beta^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)}\int \frac{\partial z}{((z-\alpha)^2+\beta^2)^{p-1}}$$

welche Formel mit der früheren, bei einem andern Anlaß gefundenen übereinstimmt.

Entwicklung der Reihen

Man kann ein Integral, welches sich weder algebraisch noch durch die gewöhnlichen transcendenten Functionen in endlicher Form darstellen läßt, immer annäherungsweise durch unendliche Reihen darstellen u. zwar, wie dies meistens geschieht nach positiven oder negativen Potenzen der Veränderlichen fortschreitend. Die Methode der Entwicklung entspringt aus der Bemerkung, daß, wenn die Function $F(x)$ unter dem Integral-Zeichen in eine annähernd zwischen gewissen Grenzen der Werthe von x convergirende Reihe, entwickelt wird u. wenn jedes Glied dieser Reihe integrabel ist, alsdann auch $\int F(x)\,dx$ durch eine unendliche Reihe dargestellt werden kann. Die Entwicklung der Function $F(x)$ kann nach sehr verschiedenen Methoden geschehen; die vorzüglichsten u. am meisten in Anwendung kommenden sind aber der binomische Lehrsatz u. die Maclaurin'sche Reihe, worüber folgende Beispiele eingeführt werden sollen.

Es sei z.B. $F(x) = \sqrt{1+x^4} = (1+x^4)^{\frac{1}{2}}$

Entwickelt man diese Function nach dem binomischen Lehrsatz, so gibt sich die folgende, nach positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe.

$$(1+x^4)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^4}{2} - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{16} - \ldots =$$

$$1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{x^8}{1.2} + \frac{1.3}{2^3}\frac{x^{12}}{1.2.3} - \frac{1.3.5}{2^4}\cdot\frac{x^{16}}{1.2.3.4} + \ldots$$

Also auf beiden Seiten integrirt

$$\int dx\sqrt{1+x^4} = x + \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{x^9}{1.2.9} + \frac{1.3}{2^3}\cdot\frac{x^{13}}{1.2.3.13} - \ldots$$

Will man eine Entwicklung nach negativen Potenzen von x haben, so schreibe man die Quadratwurzel unter der Form $\sqrt{1+x^4} = x^2\sqrt{1+x^{-4}}$ und entwickle eine nach der binomischen Formel so erfolgt.

$$\sqrt{1+x^4} = x^2(1+x^{-4})^{\frac{1}{2}} = x^2\left\{1 + \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2.x^8} + \frac{1.3}{2^3}\cdot\frac{1}{1.2.3.x^{12}} - \cdots\right\}$$

Daher $\int\sqrt{1+x^4}.dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1.2.5.x^5} - \ldots$

Die Reihenentwicklung gegebener Functionen wird häufig durch Anwendung der Integralrechnung sehr erleichtert und hierfür folgende Beispiele. Soll z.B. $l(1+x)$ in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden, so kann man sich des Umstandes nennen, daß der Differenzialquotient dieser Funktion ein sehr einfacher rationaler Ausdruck ist und daß also die Entwicklung desselben leichter sein wird, als der gegebenen Funktion. Es ist nämlich dieser Differentialquotient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$ u. folglich integr.

$$\int \frac{dx}{1+x} = l\,x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + C$$

Die Constante ergibt sich, wenn man $x=0$ setzt C

2. Man soll ferner $l(x+\sqrt{1+x^2})$ in eine Reihe nach Potenzen von x entwickeln.

Man differenziere diese Funktion, so erhält man

$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$, was algebraisch ist. Man entwickle nun den binom. Lehrsatz.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{x^4}{2^2} - \frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{x^6}{2^3} + -$$

und integrirt sodann, so erhält man entsprechend wieder die gegebene Funktion, und also die verlangte Reihe

$$l(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{1.2}\,\frac{x^5}{2^2.5} - \frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{x^7}{2^3.7} + \ldots$$

3. Man soll ebenso $\operatorname{arc\,tg} x$ nach Potenzen von x entwickeln. Der Differential-Quotient dieser Funkt. ist $\frac{1}{1+x^2}$ und da $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \ldots$

so folgt, wenn man integrirt

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$, wobei die Constante wieder $=0$ ist, weil für $x=0$ sich die beiden Seiten der Gl. auf 0 reduciren.

4. Ferner soll man $\operatorname{arc\,sin} x$ entwickeln

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{x^4}{2^2} + \ldots\ldots$$

daher $$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Setzt man hierin $\operatorname{arc\,sin} x = y$, so verwandelt sich die Formel in:

$$y = \sin y + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3 y}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^5 y}{5} + \ldots$$

Und, wenn man im vorhergehenden Beispiel (3) $\operatorname{arc\,tg} x = z$ setzt, erfolgt

$$z = \operatorname{tg} z - \frac{\operatorname{tg}^3 z}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 z}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7 z}{7} + \ldots$$

5. Man soll die Funktion $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right)$ nach Sinus der Vielfachen von x entwickeln.

Es sei dies jetzt $= y$. Man differenzire, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right)}{1+\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right)^2} = \frac{k\cos x - k^2}{(1-k\cos x)^2 + k^2\sin^2 x} = \frac{k\cos x - k^2}{1-2k\cos x + k^2}$$

Man setze den Nenner dieses Bruches $1-2k\cos x + k^2 = 0$ u. suche die Wurzeln dieser Gl. so wird man finden:

$$k = \cos x \pm \sqrt{-1+\cos^2 x} = \cos x \pm \sqrt{(-1)}\sin x = e^{\pm x\sqrt{(-1)}},$$

daß man also hat:

$$k^2 - 2k\cos x + 1 = (k - e^{x\sqrt{(-1)}})(k - e^{-x\sqrt{(-1)}})$$ und es ist nun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k\cos x - k^2}{\{k-e^{x\sqrt{-1}}\}\{k-e^{-x\sqrt{-1}}\}}$$ Da aber $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, so

verwandelt sich der Differentialausdruck in:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}-2k}{(k-e^{x\sqrt{-1}})(k-e^{-x\sqrt{-1}})} = -\frac{k}{2}\cdot\frac{(k-e^{x\sqrt{-1}})+(k-e^{-x\sqrt{-1}})}{(k-e^{x\sqrt{-1}})(k-e^{-x\sqrt{-1}})}$$

Man setze $e^{x\sqrt{-1}} = m$ und $e^{-x\sqrt{-1}} = n$, so ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{2}\cdot\frac{(k-m)+(k-n)}{(k-m)(k-n)}$$ Zerlegt man in Partialbrüche so hat man

$$\frac{2k-m-n}{(k-m)(k-n)} = \frac{A}{k-m} + \frac{B}{k-n} \qquad 2k-m-n = A(k-n)+B(k-m)$$ woraus man für $k=m$ u. $k=n$ beziehungsweise erhält: $A=1$, $B=1$; daher

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{k-m}+\frac{1}{k-n}\right) = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{k-e^{x\sqrt{-1}}}+\frac{1}{k-e^{-x\sqrt{-1}}}\right)$$

Da nun $$\frac{1}{k-e^{x\sqrt{-1}}} = -\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}-k} = -\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}}\left(1-ke^{-x\sqrt{-1}}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}}\left(1+ke^{-x\sqrt{-1}}+k^2e^{-2x\sqrt{-1}}+\ldots\right)$$

Und ebenso $$\frac{1}{k-e^{-x\sqrt{-1}}} = -\frac{1}{e^{-x\sqrt{-1}}}\left(1+ke^{x\sqrt{-1}}+k^2e^{2x\sqrt{-1}}+\ldots\right)$$

so erfolgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2}\cdot\left\{\begin{array}{l} e^{-x\sqrt{-1}}+ke^{-2x\sqrt{-1}}+k^2e^{-3x\sqrt{-1}}+\ldots \\ +e^{x\sqrt{-1}}+k\cdot e^{2x\sqrt{-1}}+k^2\cdot e^{3x\sqrt{-1}}+\ldots \end{array}\right\}$$

Wenn man nun je zwei der untereinanderstehenden Glieder dieser beiden Reihen vereinigt, so geben sie zusammen immer einen Cosinus, da allgemein $e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}} = 2\cos 2x$ ist; man hat demnach

$$\frac{dy}{dx} = k(\cos x + k\cos 2x + k^2\cos 3x + \ldots)$$

und daher, wenn man endlich integrirt

$$y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right) = k\sin x + \frac{k^2}{2}\sin 2x + \frac{k^3}{3}\sin 3x + \ldots$$

Es ist bemerkenswerth, daß diese Reihe einen Winkel eines ebenen Dreiecks darstellt, von welchem 2 Seiten u. der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben ist. Die folgende Betrachtung führt zu diesem Satze. Es seien a u. b die 2 Seiten, x der eingeschlossene Winkel und y, der, der Seite a gegenüber liegende, so ist bekanntlich:

$$a : b = \sin y : \sin(x+y)$$

oder $$a \sin(x+y) = b \sin y$$

oder $$a(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = b \sin y$$

oder, wenn man durch $\cos y$ dividirt

$$a \sin x + a \cos x \cdot \operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} y$$

woraus $\operatorname{tg} y = \dfrac{a \sin x}{b - a\cos x}$, oder endlich, wenn man Zähler u. Nenner des letzten Bruches durch b dividirt:

$$y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{a}{b}\sin x}{1 - \frac{a}{b}\cos x}\right)$$, setzt man nun in obiger Reihe $k = \frac{a}{b}$, so folgt

$$y = \frac{a}{b}\sin x + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$$

Nennt man nun z den dritten Winkel des gegebenen Dreiecks, so braucht man nur $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$ zu vertauschen, u. man hat alsdann

$$z = \frac{b}{a}\sin x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\sin 2x}{2} + \left(\frac{b}{a}\right)^3 \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$$

welche beide Reihen zusammen addirt immer $180° - x$ geben müssen, was auch a u. b sein. Diese Reihe convergirt sehr schnell, wenn $\frac{a}{b}$ oder $\frac{b}{a}$ eine sehr kleine Größe ist, in welchen Fällen dieselben auch nur angewendet werden.

Die Reihe $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{k \sin x}{1 - k\cos x}\right) = k \sin x + \dfrac{k^2}{2}\sin 2x + \ldots$ spielt in der Analysis eine wichtige Rolle. Es sollen hier nur einige der naheliegendsten speciellen Fällen angeführt werden.

Es sei $k = +1$, so hat man

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{\pi - x}{2}$$ daher

a) $$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

Es sei $k = -1$, so hat man:

$$-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = -\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = -\frac{x}{2};$$ folglich:

b) $$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots$$

Addirt man die beiden Gleichungen, so ergibt sich

Die merkwürdige Gleichung

c) $\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$

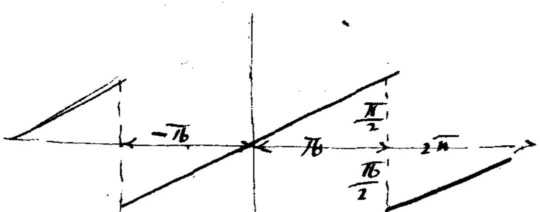
Setzt man hierin z.B. $x = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die von Leibnitz zuerst gefundene sehr merkwürdige Reihe

$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

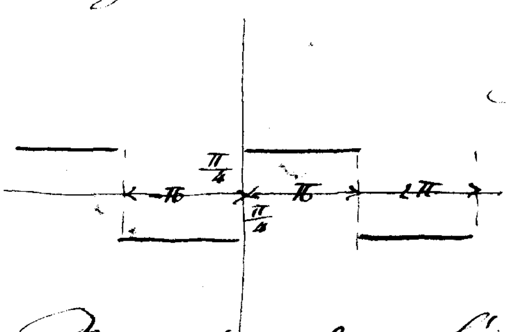
Zieht man das erste dem zweiten, das dritte dem vierten u.s.w. Glied zusammen, so hat man die viel schneller convergirende Reihe

$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots\dots\right)$

Die Gleichungen b u. c sind jedoch nicht für alle Werthe v. x gültig, obschon sie immer convergiren. Die erstere stellt nämlich nicht immer $\frac{x}{2}$ u. die letztere nicht immer $\frac{\pi}{4}$ dar, sondern dies ist nur der Fall, so lange x zwischen 0 u. π liegt; diese beiden Gleichungen lassen eine interessante geometrische Repräsentation zu.



Man trage den Werth der Reihe b, für alle positiven und negativen Werthe von x als Ordinate, u. x als Abscisse auf, so erhält man v. x = 0 bis x = π eine gerade Linie, deren Ordinate = $\frac{\pi}{2}$ ist und welche zur Abscissenaxe unter einem geneigt ist, dessen $tg = \frac{1}{2}$; bei x = π aber macht die Ordinate einen Sprung in zwei Absätzen, nämlich sie stürzt von $\frac{\pi}{2}$ auf 0 u. von da auf $-\frac{\pi}{2}$ herab; läßt man sodann x von π bis 2π wachsen, so erhält man abermals eine gerade Linie und so fort ein System von parallelen Linienstücken.



Auf gleiche Weise würde man finden, daß die Summe der Reihe c sich geometrisch als ein System von parallelen Linien darstellen läßt, welches ebenfalls bei π, 2π, u.s.f. seine Unterbrechung hat.

Man soll die Function $x\sqrt{x^2+1} + l(x+\sqrt{x^2+1})$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln. — Differenzirt man diese Function so ergiebt sich für den Differenzialquotient.

$$\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{x^2+1}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, nach dem binom. Lehrsatze, so erhält man die Reihe

$$2(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 2\left(1+\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}\cdot x^4 + \tfrac{1}{16}\cdot x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 + \dots\right)$$

Und wenn man integrirt, so erhält man

$$x\sqrt{x^2+1} + l(x+\sqrt{x^2+1}) = 2\left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} - \frac{5}{128}\cdot\frac{x^9}{9} + \dots\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} - \frac{5x^9}{1152} + \dots\right)$$

Viele Reihen lassen sich mit Hülfe der Integralrechnung sehr leicht summiren. Die Methoden dazu sind sehr verschieden u. zahlreich. Folgende Beispiele mögen hier genügen.

1. Man soll die Reihe

$$s = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$ summiren.

Differenzirt man die Summe dieser Reihe so hat man

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \dots$$ Da diese Reihen coincidiren, so ist: $\frac{\partial s}{\partial x} = s$ und wenn man $\frac{\partial s}{s} = \partial x$ integrirt

$ls = x$ und daher $s = e^x$

2. Man habe die Reihe

$$s = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots nx^n$$

Man multiplicire diese Reihe mit $\frac{\partial x}{x}$ u. integrire alsdann so ergibt sich.

$$\int s\frac{\partial x}{x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

Differenzirt man nun diese Gleichung, so erfolgt

$$\frac{s}{x} = \frac{(1-x)(1-(n+1)x^n) + (x - x^{n+1})}{(1-x)^2}, \text{ folglich}$$

$$s = \frac{x(1-(n+1)x^n + nx^{n+1})}{(1-x)^2}$$

3. Man soll die Reihe

$$s = ax^\alpha + (a+b)x^{\alpha+\beta} + (a+2b)x^{\alpha+2\beta} + \dots + (a+nb)x^{\alpha+n\beta}$$

summiren. Man multiplicire die Gleichung mit $x^\lambda\partial x$, wo λ eine noch näher zu bestimmende Grösse ist und integrire sodann, so erhält man

$$\int s x^\lambda \partial x = \frac{ax^{\alpha+\lambda+1}}{\alpha+\lambda+1} + (a+b)\frac{x^{\alpha+\beta+\lambda+1}}{\alpha+\beta+\lambda+1} + (a+2b)\cdot\frac{x^{\alpha+2\beta+\lambda+1}}{\alpha+2\beta+\lambda+1} + \dots + (a+nb)\frac{x^{\alpha+n\beta+\lambda+1}}{\alpha+n\beta+\lambda+1}$$

Versuchen wir nun λ so zu bestimmen, daß für

für den beliebigen Werth von n die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x und y gemeint einander gleich werden, daß also

$$\frac{a}{\alpha+\lambda+1} = \frac{a+nb}{\alpha+n\beta+\lambda+1}$$

für jeden beliebigen n stattfindet. Ordnet man diese Gleichung so ergibt sich

$$a\alpha+na\beta+a\lambda+a = a\alpha+a\lambda+a+\alpha nb+n\lambda b+nb$$

$$a\beta = \alpha b+b\lambda+b \qquad \lambda = \frac{a\beta}{b}-\alpha-1 = \frac{a\beta-\alpha b-b}{b}$$

welche Gleichung die Bedingungsgleichung für λ ist. Es läßt sich also λ so bestimmen, daß die Reihe für das Integral als eine geometrische summirt werden kann. Wenn dieses geschehen, so erhält man.

$$\int x^{\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}}.S.\partial x = \frac{b^{\phi}}{\beta}\,\frac{x^{\frac{a\beta}{b}}\,x^{\frac{\beta}{b}(a+(n+1)b)}}{1-x^{\beta}}$$

$$\phi = \frac{a}{\alpha+\lambda+1} = \frac{a}{\alpha+\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}+1} = \frac{b}{\beta}$$

Differenzirt man nun die Gleichung i beiderseits, daraus S, so hat man, was auch a, b, α, β sein können

$$S = \frac{x^{\alpha}\left(a+(b-a)x^{\beta}-(a+nb)x^{n\beta}+(a+(n-1)b)\,x^{(n+1)\beta}\right)}{(1-x^{\beta})^2}$$

Die Summe muß mit der im vorigen Beispiele übereinstimmen, wenn man $a=1$, $b=1$, $\alpha=1$, $\beta=1$ setzt.

4. Man soll die Reihe

$$S = x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2\cdots7}+\ldots\ldots$$

summiren. – Differenzirt man diese Reihe zwei Mal, so erfolgt

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3\cdots6}+\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\left(x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2\cdots7}+\ldots\right)$$

folglich ist $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -s$; Es sei $\frac{\partial s}{\partial x} = t$, so ist $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial t}{\partial x} = -s$. Eliminirt man ∂x aus die beiden Gleichungen für s u. t, so folgt: $\partial x = \frac{\partial s}{t}$; $\partial x = -\frac{\partial t}{s}$, woraus sich ergibt $\frac{\partial s}{t} = -\frac{\partial t}{s}$. oder

$s.\partial s = -t.\partial t$ Integrirt man, so erfolgt $s^2 = -t^2+C$

Um die Constante zu bestimmen setzt man $x=0$ so ist $s=0$, $t=1$, folglich $C=1$. Es ist also $s^2=1-t^2$ oder,

wenn man t durch $\frac{\partial s}{\partial x}$ ersetzt $s^2 = 1 - \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$, woraus
$\partial x = \frac{\partial s}{\sqrt{1-s^2}}$; daher, wenn integrirt wird
$x = \int \frac{\partial s}{\sqrt{1-s^2}} = \text{arc}\sin s$, folglich $s = \sin x$, $t = \cos x$

5. Man habe die Reihe

$$s = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \ldots$$

Differenzirt man dieselbe, so ergibt sich

$$\frac{\partial s}{\partial x} = m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^2 + \ldots$$

Bei aufmerksamer Betrachtung dieser Reihe wird man bald bemerken, daß dieselbe mit dem Bruche $\frac{1+x}{m}$ multiplicirt, mit der gegebenen völlig übereinstimmt; denn man hat:

$$\frac{1+x}{m}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = (1+x)\left(1 + \frac{m-1}{1}\cdot x + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \ldots\right) = s$$

Man hat also die Relation

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{m\cdot s}{1+x}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial s}{s} = \frac{m\cdot\partial x}{1+x},$$

und, wenn man integrirt,

$$ls = m\,l(1+x)$$ oder, wenn man zu den Zahlen übergeht $s = (1+x)^m$
worin der binomische Lehrsatz in seiner größten Allgemeinheit enthalten ist. Man hat

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \ldots$$

Multiplicirt man diese Gl. mit A^m und setzt $Ax = B$, so erfolgt

$$(A+B)^m = A^m + m\,A^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot A^{m-2}\cdot B^2 + \ldots$$

Aus einer Reihenentwicklung lassen sich auf unendlich verschiedene Weise wieder neue Entwicklungen durch Integration ableiten. Hievon einige Beispiele.

1. Wir fanden weiter oben die Reihe

$$l(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Multiplicirt man mit ∂x und integrirt hierauf so erfolgt $\int \partial x\, l(1+x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots$
Durch theilweise Integration findet man:

$$\int \partial x\, l(1+x) = x\,l(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\cdot\partial x$$
$$= x\,l(1+x) - x + l(1+x) = (1+x)\,l(1+x) - x$$

Man hat daher die folgende neue Entwicklung

$$(1+x)\,l(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \cdots$$

Für $x=1$ ergibt sich daraus

$$2\,l\,2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots$$

Multiplicirt man dagegen die gegebene Reihe für $l(1+x)$ mit $\frac{dx}{x}$ so erfolgt

$$\int \frac{l(1+x)}{x}.dx = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \cdots$$

Das Integral linker Hand, welches den Namen „Integral-Logarithmus" und die Bezeichnung „li" erhalten hat, läßt sich jedoch nicht in geschlossener Form darstellen.

2. Weiter aber wurde gefunden

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Multiplicirt man mit dx u. integrirt, so hat man linker Hand

$$\int dx \arcsin x = x \arcsin x - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

folglich, wenn man auch die Reihe rechter Hand integrirt

$$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{3.4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^6}{5.6} + \cdots$$

Für $x=1$ ergibt sich $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1.3}{2.4.5.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.8}$.

3. Früher hatten wir gefunden

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Mit dx multiplicirt u. hierauf integrirt ergibt linker Hand

$$\int dx \operatorname{arc\,tg} x = x \operatorname{arc\,tg} x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\,l(1+x^2)$$

und man hat die bemerkenswerthe Entwicklung

$$x \operatorname{arc\,tg} x - l\sqrt{1+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} - \frac{x^8}{7.8} + \cdots$$

Setzt man hierin $x=1$, so hat man die bekannte Reihe $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,l\,2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{78} + \cdots$

4. Wir fanden aber

$$x\sqrt{1+x^2} + l(x+\sqrt{1+x^2}) = 2\left(x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} - \cdots\right)$$

Multiplicirt man diese Reihe mit dx u. integrirt hierauf, so ergibt sich

$$\int x\sqrt{1+x^2}.dx + \int dx\cdot l(x+\sqrt{1+x^2}) = 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{240} + \cdots\right)$$

und da $\int x\,dx\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ und:

$$\int dx\, l(x+\sqrt{1+x^2}) = x\, l(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$= x\, l(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$$; folglich, wenn man einsetzt:

$$\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + x\, l(x+\sqrt{1+x^2}) = x^2 + \frac{x^4}{1\cdot 2} - \frac{x^6}{120} + \dots$$

5, Es wurde gefunden

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Mult. man die Gl. mit $x\,dx$ und integrirt alsdann, so findet man

$$\int x \sin x\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{x^7}{7} - \dots$$

Da $\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x\, dx = \sin x - x\cos x$, so ist auch diese letzten Differenz gleich jener Reihe.

Entwicklung solcher Integrale in Reihen, die in geschlossener Form nicht gefunden werden können

Die meisten Integrale, auf welche man in der Anwendung geführt wird, gehören unter diese Classe und die Methoden ihrer Entwicklung in unendliche Reihen sind sehr zahlreich geworden; die meisten aber sind nur in ganz besonderen Fällen brauchbar. Im Allgemeinen ist zu bemerken, daß es am zweckmäßigsten ist einen Faktor der Funktion unter dem Integralzeichen nach den schon abgeleiteten Reihen zu entwickeln, was am häufigsten geschehen kann. — Lassen wir frühere Beispiele aufführen, sollen einige der wesentlichsten Methoden, von denen aber die Rede war, in Kürze bezeichnet werden, da sie auch noch anderweitiges Interesse haben.

1°. Das binomische Theorem ist hierin zu rechnen, u. kommt in seiner Anwendung auf das binomische Differenzial am meisten vor. Wie früher bemerkt, ist das Integral

$\int x^m(ax^n+b)^p\, dx$ nur in den wenigsten Fällen findbar. Man kann es auf zweierlei Art entwickeln. Nach aufsteigenden und nach absteigenden Potenzen v. x.

Es ist nämlich:

$$(ax^n+b)^p = a^p\left(x^n+\frac{b}{a}\right)^p = a^p\left\{x^{np}+p\cdot\frac{b}{a}x^{n(p-1)}+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}\left(\frac{b}{a}\right)^2x^{n(p-2)}+\dots\right)$$

folglich. (absteigend)

$$\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx = a^p\left(\frac{x^{m+np+1}}{m+np+1}+p\cdot\frac{b}{a}\,\frac{x^{m+n(p-1)+1}}{m+n(p-1)+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{x^{m+n(p-2)+1}}{m+n(p-2)+1}+\dots\dots\right)$$

Eine zweite Form der Entwicklung erhält man dadurch, daß man:

$(ax^n+b)^p = x^{np}(a+bx^{-n})^p = b^p x^{np}\left(x^{-n}+\frac{a}{b}\right)^p$ entwickelt.

Man erhält nämlich

$$= b^p x^{np}\left(x^{-np}+p\,\frac{a}{b}\,x^{-n(p-1)}+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}\left(\frac{a}{b}\right)^2x^{-n(p-2)}+\dots\right)$$

folglich, wenn man integrirt, nachdem man mit x^m multiplicirt, ergibt sich (aufsteigend)

$$\int x^m(ax^n+b)^p\cdot dx = b^p\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}+p\,\frac{a}{b}\,\frac{x^{m+n-1}}{m+n+1}+\frac{p(p-1)}{1\cdot2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1}+\dots\right)$$

Hiernach läßt sich z.B. das Integral $\int dx\sqrt[3]{x^2-1}$ finden. Hier ist $m=0,\ n=2,\ a=1,\ b=-1,\ p=\frac{1}{3}$ und man hat.

$$\int dx\sqrt[3]{x^2-1} = -x+\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{5}{3^4}\cdot\frac{x^7}{7}+$$
$$\frac{5\cdot8}{4\cdot3^5}\cdot\frac{x^9}{9}+\frac{5\cdot8\cdot11}{4\cdot5\cdot3^6}\cdot\frac{x^{11}}{11}+\frac{5\cdot8\cdot11\cdot14}{4\cdot5\cdot6\cdot3^7}\cdot\frac{x^{13}}{13}+\dots$$

Man habe ferner $\int\frac{x^m}{x^n+1}\cdot dx$ zu finden.

Nach der ersten Entwicklung (nach absteigenden Potenzen) hat man. $a=1,\ b=1,\ p=-1$

$$= \frac{x^{m-n+1}}{m-n+1}-\frac{x^{m-2+1}}{m-2n+1}+\frac{x^{m-3n+1}}{m-3n+1}-\dots$$

Und wenn man nach der zweiten Entwicklung verfährt:

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}+\frac{x^{m+2n-1}}{m+2n-1}-\dots$$

2°. Eine allgem. Formel v. Joh. Bernoulli. liefert eine allg. Form der Integralrechn. u. [illegible]. Sie gibt eine besondere Reihenform, enthält sogar das Taylor'sche u. Maclaurin'sche Th. als spec. Fall in sich. - -

Diese schöne Formel ergibt sich sofort ein facher durch bloße Wiederholung des Verfahrens der theilweisen Integration. — Es seien nämlich u u. v zwei beliebige Funktionen v. x und $v^{(n)}$ der Differentialquotient n^{r} Ordnung v. v. Man setze sich vor,

$\int u\, v^{(n)}\, dx$ zu finden. Man wende nun genanntes Verfahren so an, daß man nach u fortwährend differenzirt u. nach v integrirt, dann erhält man nach einander

$$\int u\, v^{(n)}\, dx = u\, v^{(n-1)} - \int u'\, v^{(n-1)}\, dx$$

$$\int u'\, v^{(n-1)}\, dx = u'\, v^{(n-2)} - \int u''\, v^{(n-2)}\, dx \quad \text{u. s. f.}$$

Wenn man das Verfahren m mal wiederholt u. dann (substituirend) alle Gleichungen addirt, so ergibt sich

$$\int u\, v^{(n)}\, dx = u\, v^{(n-1)} - u'\, v^{(n-2)} + u''\, v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{m-1} u^{(m-1)} v^{(n-m)} + (-1)^{m} \int u^{(m)} v^{(n-m)}\, dx$$

Bemerkenswerth ist, daß wenn man das übrig gebliebene Integral auf die linke Seite bringt, wodurch man erhält:

$$\int \left(u\, v^{(n)} + (-1)^{m+1} u^{(m)} \cdot v^{(n-m)}\right) dx = u\, v^{(n-1)} - u'\, v^{(n-2)} + u''\, v^{(n-3)} \ldots + (-1)^{m-1} u^{(m-1)} v^{(n-m)}$$

und wo die linke Seite, was auch u u. v sein mögen, stets integrabel ist. Diese Beachtenswerte Formel, welche in den Lehrbüchern nur zu selten anzutreffen ist, den Character einer allgem. Integrationsformel annimmt. Darüber einige Beispiele.

1, Es sei $m = n = 1$, so ist: $\int (u\, v' + u'\, v)\, dx = u\, v$. Setzt man hierin $u = e^{x}$, $v = \frac{1}{1+x}$, so wird $u' = e^{x}$ und $v' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ und man erhält:

$$\int e^{x}\left(-\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{e^{x}}{1+x}, \text{ oder:}$$

$$\int \frac{x\, e^{x}}{(1+x)^2} \cdot dx = \frac{e^{x}}{1+x}$$

2) $m = n = 2$, so hat man $\int (u\, v'' - u''\, v)\, dx = u\, v' - u'\, v$. Setzt hierin $u = lx$ u. $v = e^{x}$, so ist $u' = \frac{1}{x}$, $u'' = -\frac{1}{x^2}$, $v' = v'' = e^{x}$ u. man erhält nun:

$\int e^x\left(lx + \frac{1}{x^2}\right).dx = \frac{e^x(x\,lx-1)}{x}$, Oder setzt man
$u = e^{kx}$ und $v = \sin\alpha x$, so ist $u' = ke^{kx}$, $u'' = k^2 e^{kx}$
$v' = \alpha\cos\alpha x$, $v'' = -\alpha^2\sin\alpha x$ und man hat demnach

$$\int e^{kx}(-\alpha^2\sin\alpha x - k^2\sin\alpha x)\,dx = e^{kx}(\alpha\cos\alpha x - k\sin\alpha x)$$

$$\int e^{kx}\sin\alpha x\,.\,dx = \frac{e^{kx}(k\sin\alpha x - \alpha\cos\alpha x)}{k^2+\alpha^2}$$

Oder hat man: $u = e^{kx}$ und $v = \cos\alpha x$, so ist
$v' = -\alpha\sin\alpha x$, $v'' = -\alpha^2\cos\alpha x$ und man erhält alsdann

$$\int e^{kx}(-\alpha^2\cos\alpha x - k^2\cos\alpha x)\,dx = e^{kx}(-\alpha\sin\alpha x - k\cos\alpha x)$$

$$\int e^{kx}\cos\alpha x\,.\,dx = \frac{e^{kx}(\alpha\sin\alpha x + k\cos\alpha x)}{\alpha^2+k^2}$$

Der wichtigste specielle Fall jedoch ergibt sich, wenn man für u u. v die folgende Hypothese macht. Setzt man nämlich:

$v = \frac{(x-h)^n}{1.2\cdots n}$ $u = f'(x+z-h)$, wobei z eine v. x und h unabhängige Grösse sein soll, Man hat alsdann:

$$v' = \frac{(x-h)^{n-1}}{1.2.3\cdots(n-1)} \qquad v'' = \frac{(x-h)^{n-2}}{1.2.3\cdots(n-2)} \qquad v^{(n-m)} = \frac{(x-h)^m}{1.2\cdots m}$$

$v^{(n)} = 1$, und $u' = f''(x+z-h)$; $u'' = f'''(x+z-h)\cdots$
$u^{(m)} = f^{(m+1)}(x+z-h)$ Setzt man alle diese Werthe in die Bernoullische Formel ein u. bemerkt daß das Integral linker Hand sich auf $f(x+z-h)$ reducirt, so wird man sogleich finden:

$$f(x+z-h) = \frac{x-h}{1}f'(x+z-h) - \frac{(x-h)^2}{1.2}f''(x+z-h) + \cdots$$
$$+ \cdots(-1)^{m-1}\frac{(x-h)^m}{m!}f^{(m)}(x+z-h) + \frac{(-1)^m}{m!}\int(x-h)^m f^{(m+1)}(x+z-h).dx + C$$

a. Es sei zur Abkürzung das Rest-Integral, welches natürlich eine Function v. x ist

$$\frac{(-1)^m}{m!}\int(x-h)^m f^{(m+1)}(x+z-h)\,dx = \Psi(x)$$

Um die Constante zu eliminiren, wollen wir für x zwei specielle Werthe substituiren und dann die beiden so erhaltenen Gleichungen von einander abziehen.

Seien diese Werthe 0 u. h; man erhält für $x=0$

$$f(z-h) = -\frac{h}{1} f'(z-h) - \frac{h^2}{1.2} f''(z-h) - \frac{h^3}{1.2.3} f'''(z-h) - \dots$$
$$\dots - \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(z-h) + \Psi(0) + Const.$$

Und für $x = h$, folgt:

$f(z) = \Psi(h) + Const.$ durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich

$$f(z) - f(z-h) = \frac{h}{1} f'(z-h) + \frac{h^2}{2} f''(z-h) + \dots$$
$$\dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(z-h) + \Psi(h) - \Psi(0)$$

Setzt man $z-h = x$, wo x mit dem früheren nicht zusammenhängt, und bringt das Glied $f(z-h)=f(x)$ der linken Seite der Gleichung auf die rechte, so erfolgt

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x) + \Psi(h) - \Psi(0)$$

Diese Reihe stimmt mit der Taylor'schen überein, wenn man m unendlich gross werden lässt und wenn der Rest-Ausdruck $\Psi(h) - \Psi(0)$ für ein solches m zu 0 wird, in welchem Falle die Taylorsche Reihe, wenn sie überhaupt convergirt, beweisbar ist. — Die Ergänzung der Taylorschen wird Lagrange zugeschrieben. Früher indessen findet man sie schon bei d'Allembert. Die Discussion des Ergänzungsgliedes $\Psi(h) - \Psi(0)$ bleibt immer andern Vorlagen fort vorbehalten.

7. 6. Vorausgesetzt, man dürfe die Taylor'sche Reihe gebrauchen, (setzt sie ins Unendliche fort) so ergibt sich aus derselben auch die Mac-Laurin'sche; man setze nämlich $x=0$ und nenne das gesetzte x durch h, so folgt $f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots$

In manchen Fällen kann man sich dieser Formel zur Entwicklung eines nicht findbaren Integrals bedienen; denn multiplicirt man die Gleichung mit dx und integrirt hierauf, so erhält man:

$$\int f(x)\,dx = \frac{x}{1} f(0) + \frac{x^2}{1.2} f'(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f''(0) + \dots + Const.$$

Es sei z.B. $f(x) = l \cos x$, so hat man $f'x = tg\,x$

$f''(x) = -(1+tg^2 x)$, $f'''(x) = -2tg\,x(1+tg^2 x)$

$f^{IV}(x) = -2(1+tg^2 x) - 2.3\,tg^2 x(1+tg^2 x)$ u.s.f.

und alsdann ergibt sich

$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{IV}(0) = -2$, $f^{V}(0) = 0$

$f^{VI}(0) = -16$ u.s.f. Und man erhält nun

$$\int \log \cos x\,dx = -\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{2x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{16x^7}{1.2.3 \dots 7} - \dots + C$$

Es sei ferner $f(x) = e^{\sin x}$, so folgt: $f'(x) = e^{\sin x} . \cos x$

$f''(x) = (-\sin x + \cos^2 x)\, e^{\sin x}$; $f'''(x) = (-\cos x - 2\cos x \cdot \sin x + \cos x(-\sin x + \cos^2 x))\, e^{\sin x}$

$= -\sin x \cos x \cdot e^{\sin x}(3 + \sin x)$ u. s. f. und man hat

$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1,\ f'''(0) = 0,\ f''''(0) = -3$ u. s. f.

Es ergiebt sich daher, wenn man substituirt:

$$\int e^{\sin x} dx = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{3x^5}{5!} + \dots$$

Die Bernoulli'sche Formel kann selbst unmittelbar zu Reihenentwicklungen benutzt werden, wenn man von dem Restintegral absehen darf. Darüber die folgenden Beispiele.

Setzt man in

$$\int u v^{(n)} dx = u v^{(n-1)} - u' v^{(n-2)} + u'' v^{(n-3)} - \dots$$

$u = f(x)$, u. $v^{(n)} = e^{kx}$, so ist: $v^{(n-1)} = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}$

$v^{(n-2)} = \frac{1}{k^2} \cdot e^{kx}$ ....

Und man hat nun:

$$\int f(x) \cdot e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx}\left(f(x) - \frac{1}{k} f'(x) + \frac{1}{k^2} f''(x) - \dots\right)$$

Setzt man hierin z. B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, so ist: $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$f''(x) = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$, $f'''(x) = \frac{1.3.5}{2^3} \cdot \frac{1}{x^3\sqrt{x}}$ u. s. f.

Daher, wenn man einsetzt, erhält man

$$\int e^{kx} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{e^{kx}}{k\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2kx} + \frac{1.3}{2^2k^2x^2} + \frac{1.3.5}{2^3 k^3 x^3} + \dots\right)$$

Setzt man in der Bernoulli'schen Formel ferner

$u = f(x)$ und $v^{(n)} = x$, so ist: $v^{(n-1)} = \frac{x^2}{1.2}$, $v^{(n-2)} = \frac{x^3}{1.2.3}$ ...

so erhält man alsdann, wenn man einsetzt:

$$\int x f(x) \cdot dx = \frac{x^2}{1.2} f(x) - \frac{x^3}{1.2.3} f'(x) + \frac{x^4}{4!} f''(x) - \dots$$

Unter dem Namen der „Bernoulli'schen Reihe" ist ein ganz specieller Fall der obigen häufig zu treffen, welchen wir nur historisch anführen wollen. Setzt man nämlich $v = \frac{x^n}{n!}$ und $u = f(x)$, so erhält man:

$v' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $v'' = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$, ... $v^{(n-1)} = x$, $v^{n} = 1$

folglich, wenn man einsetzt:

$$\int f(x) dx = x f(x) - \frac{x^2}{1.2} f'(x) + \frac{x^3}{3!} f''(x) - \frac{x^4}{4!} f'''(x) + \dots$$

Es verdient nur noch bemerkt zu werden, dass diese Reihe, wenn man $f(x) = \varphi'(x)$ setzt, in die Form

$$\varphi(x) = x \varphi'(x) - \frac{x^2}{1.2} \varphi''(x) + \frac{x^3}{1.2.3} \varphi'''(x) - \dots + \mathrm{Const}\,(= \varphi(0))$$

übergeht, und dass diese den Character einer allgemeinen Formel für Reihen-Entwicklungen gegebener Functionen hat;

∂

Du Bourguet hat folgendes Theorem entwickelt, was in manchen Fällen anwendbar ist. Dasselbe bezieht sich auf das Integral $\int f(x)^n dx$ und stellt die Entwicklung nach Potenzen von $f(x)$ fortschreitend dar. Man erhält dasselbe auf folgende Weise: Es sei

$\int f(x)^n dx = A_1 f(x)^{n+1} + A_2 f(x)^{n+2} + A_3 f(x)^{n+3} + \dots$, wobei $A_1, A_2, A_3 \dots$ im Allgemeinen als Functionen von x betrachtet werden müssen, und um deren Bestimmung es sich auch nun eben handelt. Um sie zu erhalten differenzire man die Gleichung, so ergibt sich:

$$f(x)^n = \frac{dA_1}{dx} f(x)^{n+1} + (n+1)A_1 f(x)^n f'(x) + \frac{dA_2}{dx} f(x)^{n+2} + (n+2)A_2 f(x)^{n+1} f'(x) + \dots$$

welche Gl. identisch sein muß, daß für alle Werthe der darin vorkommenden Größen und für jede Form der Function $f(x)$ stattfinden muß. Daß dies geschehe, kann auf folgende Art erreicht werden: Man ordne die Gleichung nach Potenzen von $f(x)$, so wird man finden:

$$0 = ((n+1)A_1 f'(x) - 1) f^n(x) + \left((n+2)A_2 f'(x) + \frac{dA_1}{dx}\right) f(x)^{n+1} + \left((n+3)A_3 f'(x) + \frac{dA_2}{dx}\right) f(x)^{n+2} + \dots$$

Dieser Gleichung leistet man Genüge, wenn man setzt:

$(n+1)A_1 f'(x) - 1 = 0$, $(n+2)A_2 f'(x) + \frac{dA_1}{dx} = 0$

$(n+3)A_3 f'(x) + \frac{dA_2}{dx} = 0 \dots$, woraus man erhält

$$A_1 = \frac{1}{(n+1) f'(x)}, \quad A_2 = -\frac{\frac{dA_1}{dx}}{(n+2) f'(x)}, \quad A_3 = -\frac{\frac{dA_2}{dx}}{(n+3) f'(x)} \dots$$

so daß also jeder Coefficient einfach aus dem vorhergehenden durch Differentiation abgeleitet wird, wenn man dies für die 3 ersten Coefficienten ausführt, so erhält man: $A_1 = \frac{1}{(n+1) f'(x)}$, $A_2 = \frac{f''x}{(n+1)(n+2) f'(x)^3}$

$A_3 = \frac{3 f''(x)^2 - f'(x) f'''(x)}{(n+1)(n+2)(n+3) f'(x)^5}$. Als Beispiel dient:

1, $f(x) = lx$. Man hat.

$$\int (lx)^n dx = A_1 (lx)^{n+1} + A_2 (lx)^{n+2} + \dots$$

Differenzirt man u. ordnet alsdann die Gleichung nach Potenzen v. lx, so ergibt sich:

$$0 = \left((n+1)A_1 \cdot \frac{1}{x} - 1\right)(lx)^n + \left((n+2)A_2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{dA_1}{dx}\right)(lx)^{n+1} + \left((n+3)A_3 \frac{1}{x} + \frac{dA_2}{dx}\right)(lx)^{n+2} + \dots$$

Man erhält nun, wenn man die Coefficienten der verschiedenen Potenzen v. $l(x) = 0$ setzt:

$A_1 = \frac{1}{(n+1)\cdot\frac{1}{x}} = \frac{x}{n+1}$, $A_2 = \frac{-\frac{1}{x^2}}{(n+1)(n+2)\cdot(\frac{1}{x})^3}$, $A_2 = -\frac{x}{(n+1)(n+2)}$

$A_3 = \frac{\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\frac{1}{x^5}} = \frac{x(x+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$, u. s. f.

Man hat demnach, wenn man einsetzt:

$$\int (lx)^n dx = \frac{x}{n+1}(lx)^{n+1} - \frac{x}{(n+1)(n+2)}(lx)^{n+2} + \frac{x(x+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}(lx)^{n+3} - \dots$$

Auf gleiche Weise läßt sich auch 2, $\int(\sin x)^n dx$ entwickeln. Obige allgemeine Formel wird nur in den Fällen illusorisch, wo n eine der Zahlen $-1, -2, -3 \dots$ ist.

2. Wie Eingangs erwähnt, ist es oft am zweckmäßigsten statt des ganzen Ausdrucks unter dem Integralzeichen, nur einen Faktor desselben, in eine Reihe zu verwandeln, so daß dann jedes Glied des Produktes leicht integrirt werden kann. Hierbei einige Beispiele.

1, Das Integral $\int\frac{\sin x}{x}dx$ läßt sich z. B. in endlicher Form nicht finden. Entwickelt man nun $\sin x$, so ergiebt sich sogleich:

$$\int\frac{\sin x}{x}\cdot dx = x - \frac{x^3}{1.2.3.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.5} - \dots + C.$$

2. Das Integral: $\int e^x\frac{dx}{x}$ ist ebenfalls eine eigenthümliche Transcendente. Entwickelt man nur e^x, so erhält man:

$$\int e^x\frac{dx}{x} = lx + x + \frac{x^2}{1.2^2} + \frac{x^3}{1.2.3^2} + \dots + C$$

3. Das Integral. $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot dx$ ist ebenfalls nicht findbar. Da nun

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$ so erhält man:

$$\int\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx = x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \dots$$

4. Man soll das Integral $\int\frac{dx}{lx}$ finden.
Man transformire das Integral zuerst und setze $lx = y$ also $x = e^y$, $dx = e^y dy$; so ist $\int\frac{dx}{lx} = \int\frac{e^y dy}{y}$

Braucht man nun die bereits gefundene Entwicklung (2) für das transformirte Integral, so wird man erhalten: $\int e^y\frac{dy}{y} = ly + y + \frac{y^2}{1.2^2} + \frac{y^3}{1.2.3^2} + \dots$ Daher wenn man y wieder durch x ausdrückt

$$\int\frac{dx}{lx} = l(lx) + lx + \frac{(lx)^2}{1.2^2} + \dots \text{Const.}$$

5. Ein sehr berühmtes Integral ist folgendes

$\int e^{-x^2}dx$, welches eine sehr wichtige Rolle in der Theorie der bestimmten Integrale spielt. Wünscht man eine Reihe entwickeln, so kann man eine solche erhalten, indem:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1\cdot2} - \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \dots,$$ daher, wenn man integrirt.

$$\int e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{1\cdot2\,5} - \frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{x^9}{9} - \dots$$

6. Das Integral $\int dx\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}$ soll, weil es nicht gefunden werden kann, durch eine Reihe dargestellt werden, wobei $k<1$ sein soll. Entwickelt man den Factor $\sqrt{1-k^2x^2}$ in eine Reihe, so erhält man:

$$= 1 - \frac{1}{2}k^2x^2 - \frac{1}{8}k^4x^4 - \frac{1}{16}k^6x^6 - \frac{5}{128}k^8x^8 - \dots$$ u. zwar sieht daß diese Entwicklung genügt, indem jedes Glied integrabel ist. Man hat nämlich

$$\int dx\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{k^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{k^4}{8}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} - \dots$$

$$= \arcsin x - \frac{k^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} - \dots$$

Die Integrale, auf welche wir so gekommen sind, können bekanntlich gefunden werden, durch successive Anwendung der früheren Reductionsformel

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

7. Die Reihenentwicklung eines Integrals nach Potenzen der Variabeln hat häufig den Übelstand, daß sie nicht immer convergirt, u. daß man das Gesetz ihres Fortgangs nicht immer erkennen kann. Gleichwohl ist diese Entwicklungsform die gebräuchlichste. Ausserdem sehr wichtig sind die Entwicklungen nach sin. u cos. der Vielfachen v. x, wofür es freilich keine so nahe liegende allg. Regeln gibt. Einige Beispiele sollen angeführt werden.

1° Man soll $\int \operatorname{arctg}\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right)dx$ nach einer Reihe entwickeln.

Wir erinnern daran, daß die Function unter dem I.-Z. früher nach sin. der Vielf. v. x entwickelt wurde. Diese Entwicklung fiel sehr leicht aus, während die nach Potenzen v. x die grössten Umständlichkeiten voraussehen würde. Wir fanden früher

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right) = k\sin x + \frac{k^2}{2}\sin 2x + \frac{k^3}{3}\sin 3x + \dots$$

Integrirt man, so ergibt sich:

$$\int \operatorname{arctg}\left(\frac{k\sin x}{1-k\cos x}\right)dx = -\left(k\cos x + \frac{k^2}{2}\cos 2x + \dots\right) + \text{Const.}$$

2°/ Man soll das Integral $\int l(1-2k\cos x+k^2)dx$ in eine periodische Reihe entwickeln.

Zerlegt man den Ausdruck $1-2k\cos x+k^2$ in seine linearen Factoren, setzt denselben also $=0$, und löst die in Bezug auf k quadratische Gleichung auf, so ergibt sich

$k = \cos x \pm \sqrt{(-1)}\cdot\sin x = e^{\pm x\sqrt{-1}}$, so dass man also hat

$$l(1-2k\cos x+k^2) = l\left((k-e^{x\sqrt{-1}})(k-e^{-x\sqrt{-1}})\right)$$
$$= 2lk + l\left(1-\frac{1}{k}e^{x\sqrt{-1}}\right) + l\left(1-\frac{1}{k}e^{-x\sqrt{-1}}\right)$$

Entwickelt man jeden der beiden letzten Logarithmen nach der Formel $l(1-y) = -y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\dots$ in eine Reihe und vereinigt dann die Ausdrücke, so ergibt sich:

$$l(1-2k\cos x+k^2) = 2lk - \frac{2}{k}\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} - \frac{2}{k^2}\frac{e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}}{2} - \frac{2}{k^3}\frac{e^{3x\sqrt{-1}}+e^{-3x\sqrt{-1}}}{2} - \dots$$

$= 2lk - \frac{2}{k}\cos x - \frac{2}{k^2}\cdot\cos 2x - \dots$ Und wenn man integrirt.

$$\int dx\, l(1-2k\cos x+k^2) = x\,l(k^2) - 2\left(\frac{\sin x}{k}+\frac{\sin 2x}{2k^2}+\frac{\sin 3x}{3k^3}+\dots\right)+C$$

Diese Entwicklung convergirt, wenn $k>1$ ist. Ist aber $k<1$, so bemerkt man, dass, wenn man in der Gleichung für $l(1-2k\cos x+k^2)$, $\frac{1}{k}$ für k setzt, dieselbe alsdann übergeht in:

$$l\left(\frac{1-2k\cos x+k^2}{k^2}\right) = -l(k^2) - 2(k\cos x + k^2\cos 2x+\dots)$$

Oder, wenn man $-lk^2$ beiderseits weglässt:

$$l(1-2k\cos x+k^2) = -2(k\cos x+k^2\cos 2x+\dots)$$

Und, wenn man endlich wieder integrirt

$$\int dx\, l(1-2k\cos x+k^2) = -2\left(k\sin x+\frac{k^2}{2}\sin 2x+\frac{k^3}{3}\sin 3x+\dots\right)+C$$

3°/ Das Integral $\int dx\sqrt{\cos 2x}$ lässt sich in endlicher Form nicht finden. Um es in eine periodische Reihe zu entwickeln, hat man: $\sqrt{\cos 2x} = \frac{\left(e^{2x\sqrt{-1}}+e^{-2x\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$

Wenn man eine der Reihen einmal so ordnet, dass das Glied $e^{2x\sqrt{-1}}$ das erste, und dann wieder so, dass $e^{-2x\sqrt{-1}}$ das erste Glied im Binom ist, wenn man dann die beiden Gleichungen addirt, die entsprechenden Glieder zusammen stellt, so wird man haben:

$$\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos x + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\cos 3x}{1} - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{\cos 7x}{2^2} + \frac{1.1.3}{1.2.3}\cdot\frac{\cos 11x}{2^3} - \frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{\cos 15x}{2^4} + \dots\right)$$

Und, wenn man nun integrirt, so ergibt sich

$$\int dx\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{1.2}\frac{\sin 7x}{5.2^2} + \frac{1.1.3}{1.2.3}\cdot\frac{\sin 11x}{7.2^3} - \frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}\cdot\frac{\sin 15x}{9.2^4} + \dots\right) + C$$

Wir beschließen hiermit die Entwicklung der Integrale, ohne die Untersuchung desselben mangelhaft seien. Indessen werden wir bald ein ganz anderes Mittel für die näherungsweise Bestimmung eines Integrals, nämlich das Verfahren der sogenannten „mechanischen Quadratur“.

Integration der transcendenten Functionen

Wir beginnen diese mit der Integration

A, der trigonometrischen Ausdrücke

Diese bieten in sehr verschiedener Weise auf in Verbindung unter sich und mit andern Functionen die Integration geschieht ~~also~~ oft unmittelbar durch vorherige Umwandlung durch Einführung neuer Variabeln in häufig durch Reductionsformeln, welche man sich schafft um gewisse Formen zu ~~[illegible]~~ geringere u. gewisse Grenzen einzuschließen. Bei der großen Mannigfaltigkeit der hieher gehörigen Formen ist es nöthig sich nur an die häufiger vorkommenden zu halten, von denen wir die folgenden hervorheben.

Die nachstehenden Beispiele erledigen sich durch Umformeln u. durch die Methode der Transformation, welche in der Einleitung angedeutet worden sind.

1 $\int \frac{dx}{\sin x}$ da $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$, so erhält man:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{tg\frac{x}{2}} = l(tg\tfrac{x}{2}) + C$$

2. Man habe $\int \frac{dx}{\cos x}$. Man setze $x = \frac{\pi}{2} - y$, so erhält man für das gegebene Integral:

$$= \int -\frac{dy}{\sin y} = -l(tg(\tfrac{y}{2})) = -l(tg(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{x}{2})) + C$$

3. Man habe das Integral $\int tg\,x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -l(\cos x) + C$

4. Ebenso:

$$\int ctg\,x\,dx = +l(\sin x) + C$$

3. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}\sin 2x} = \int \frac{2\,dx}{\sin 2x} = l(tg\,x) + C$

6) Man habe: $\int \sin(ax+b)\cos(\alpha x+\beta)\cdot dx$.
Bekanntlich ist: $\sin A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B)$
ebenso hat man:

$$\sin(ax+b)\cdot\cos(\alpha x+\beta) = \tfrac{1}{2}\sin((a+\alpha)x+b+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin((a-\alpha)x+b-\beta)$$

folglich, wenn man integrirt und die fehlenden Faktoren $a+\alpha$ u. $a-\alpha$ einschreibt, so erhält man:

$$\int \sin(ax+b)\cos(\alpha x+\beta)dx = -\frac{1}{2(a+\alpha)}\cdot\cos((a+\alpha)x+b+\beta) - \frac{1}{2(a-\alpha)}\cos((a-\alpha)x+b-\beta) + C$$

7. $\int \cos\sin x\,dx$. Dieses Integral läßt sich nach der vorigen Formel nicht finden, indem ein Nenner $a-\alpha = 0$ wird; indessen ergibt es sich sogleich nach der ersten Grundformel:

$$\int \cos x\sin x\cdot dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C = +\frac{\sin x^2}{2} + C$$

8) $\int \frac{\sin(x+c)}{\cos(x+\gamma)}\cdot dx$. Setzt man $x+\gamma = z$, so ist:

$$\frac{\sin(x+c)}{\cos(x+\gamma)} = \frac{\sin(z+c-\gamma)}{\cos z} = \frac{\sin z\cos(c-\gamma) + \cos z\sin(c-\gamma)}{\cos z}$$

$$= \cos(c-\gamma)\cdot tg\,z + \sin(c-\gamma)$$ und da

$dx = dz$, so erhält man, wenn nun integrirt wird:

$$\int \frac{\sin(x+c)}{\cos(x+\gamma)}\cdot dx = \cos(c-\gamma)\cdot\int tg\,z\,dz + z\sin(c-\gamma) =$$

$$= -\cos(c-\gamma)\cdot l(\cos z) + z\sin(c-\gamma) + C$$

$$= -\cos(c-\gamma)\cdot l(\cos(x+\gamma)) + (x+\gamma)\sin(c-\gamma) + C$$

9. Man soll das Integral $\int \frac{\sin x\cdot dx}{\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}$ finden

$$= \frac{1}{k}\int \frac{2k\sin x\,dx}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}} = \frac{1}{k}\sqrt{1-2k\cos x+k^2} + Const.$$

Ein auf rationale Weise aus den trig. funct. $\sin x$, $\cos x$ etc. zusammengesetzter Bruch kann, wie in der Einleitung gezeigt worden ist, immer nach $tg\frac{x}{2}$ rational gemacht werden.

denn da: $\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}$, und

$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, und $tg\,x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1-z^2}$, und endlich

$dx = \frac{2\,d\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,dz}{1+z^2}$, wenn man nun $tg\frac{x}{2} = z$ setzt, so wird ein Ausdruck der beschriebenen Art nach z rational werden u. man kann ihn alsdann integriren.

Man habe z.B.: $\int\frac{dx}{a\cos x+b}$, so hat man nach der obigen Formel sogleich

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b} = \int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{a\frac{1-z^2}{1+z^2}+b} = \int\frac{2\,dz}{(b-a)z^2+b+a}$$

Ist 1) $b-a$ positiv, so hat man, wenn durch $b+a$ dividirt wird, im Nenner $= \frac{2}{b+a}\int\frac{dz}{\frac{b-a}{b+a}z^2+1} = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\int\frac{\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\cdot dz}{\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\cdot z\right)^2+1}$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot arc\,tg\left(z\cdot\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot arc\,tg\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\cdot tg\frac{x}{2}\right) + C$$

Ist 2) $b-a$ negativ, so hat man: $= \frac{2}{b-a}\int\frac{dz}{z^2-\frac{a+b}{a-b}} = \frac{2}{b-a}\int\frac{dz}{\left(z+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\left(z-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)}$

Setzt man für den Augenblick $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = m$, so ist: $\frac{1}{(z+m)(z-m)} = \frac{A}{z+m} + \frac{B}{z-m}$

$1 = A(z-m) + B(z+m)$, woraus $A = -\frac{1}{2m}$, $B = \frac{1}{2m}$ und

Man hat nun für das Integral:

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(l\left(z+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right) - l\left(z-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,l\frac{\sqrt{a-b}\,tg\frac{x}{2}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}\,tg\frac{x}{2}-\sqrt{a+b}} + C$$

Auf ähnliche Art lassen sich die beiden Integrale $\int\frac{dx}{a\sin x+b}$ u. $\int\frac{\alpha\sin x+\beta}{a\cos x+b}\cdot dx$ finden.

Man soll ferner das Integral $\int\frac{dx}{1-2k\cos x+k^2}$ finden. Setzt man wieder $tg\frac{x}{2} = z$, so verwandelt sich der Ausdruck unter dem Integral zuerst in

$= \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-2k\frac{1-z^2}{1+z^2}+k^2} = \frac{2\,dz}{(1-k)^2+(1+k)^2z^2}$, und wenn man mit $(1-k)^2$ dividirt, u. multiplicirt

$= \frac{\frac{1+k}{1-k}\cdot dz}{1+\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2}\cdot\frac{2}{1-k^2}$, u. wenn man integrirt, so erh. man

$$\int\frac{dx}{1-2k\cos x+k^2} = \frac{2}{1-k^2}\cdot arc\,tg\left(\frac{1+k}{1-k}\cdot tg\frac{x}{2}\right) + Const.$$

Es versteht sich von selbst, daß in einem Ausdruck genannter Art auch sin u. cos. eines ganzen Vielfachen v. x vorkommen dürfen, weil sich diese nach den bekannten Formeln für $\sin mx$ u. $\cos mx$ in ganz. Potenzen v. $\sin x$ u. $\cos x$ entw. lassen. Desshäufig sind folgende Formeln für die

Integrale: $\int(\sin x)^n dx$, $\int(\cos x)^n dx$, u. $\int(tg\, x)^n dx$, wo n überhaupt worin n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Die beiden ersten Integrale ergeben sich, dargestellt durch sin. u. cos. der Vielfachen v. x unmittelbar, wenn man sich der Formeln erinnert, welche wir früher für die Potenzen $(\sin x)^n$ und $(\cos x)^n$ entwickelt haben. Wir fanden nämlich 1, für <u>n gerade</u>.

$$(\sin x)^n = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \cdot \Big(\cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)x - \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(\frac{n}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}\Big)$$

und:

$$(\cos x)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)x + \cdots + \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\cdots(\frac{n}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}\Big)$$

Multiplicirt man mit dx und integrirt hierauf, so ergeben sich für <u>n gerade</u> die Integrale:

$$\int(\sin x)^n dx = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\cdot\Big(\frac{\sin nx}{n} - \frac{n\sin(n-2)x}{n-2} + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(\frac{n}{2}+1)}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}\,x\Big) + C$$

$$\int(\cos x)^n dx = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\frac{\sin nx}{n} + \frac{n\sin(n-2)x}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\cdots\frac{n}{2}+1}{1\cdot 2\cdots\frac{n}{2}}\,x\Big) + C$$

2. für <u>n ungerade</u>.

$$\int(\sin x)^n dx = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-1}}\cdot\Big(\frac{\cos nx}{n} - \frac{n}{1}\,\frac{\cos(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\cos(n-4)x}{n-4} - \cdots$$
$$\cdots (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{n(n-1)\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}\cdot\cos x\Big) + C$$

$$\int(\cos x)^n dx = \frac{1}{2^{n-1}}\Big(\frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\frac{n+3}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{n-1}{2}}\cdot\sin x\Big) + Const.$$

Man kann diesen Formeln eine andere Darstellung geben, indem man die Integrale durch die Potenzen v. $\sin x$ u. $\cos x$ ausdrückt, was sehr einfach durch partielle Integration erreicht wird. Es ist nämlich

$$\int(\sin x)^n dx = \int(\sin x)^{n-1}\sin x\,dx = -\cos x(\sin x)^{n-1} + (n-1)\int\cos x(\sin x)^{n-2}\cos x\,dx$$

Und da: $\int(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,dx = \int(\sin x)^{n-2}dx - \int(\sin x)^n dx$, so ist folglich:

$$\text{I.}\quad \int(\sin x)^n dx = -\frac{\cos x(\sin x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\cdot\int(\sin x)^{n-2}dx$$

Das übrig bleibende Integral ist von derselben Art, wie das gegebene und durch diese Reductionsformel wird der Exponent jedesmal um 2 erniedrigt vermindert, kann also, wenn <u>n gerade</u> ist, auf 0 u. wenn <u>n ungerade</u> ist, auf +1 gebracht werden. Im ersten Fall ist das letzte Integral $= x$ Im andern Fall aber $= -\cos x$. Soll eine ähnliche Formel für $\int(\cos x)^n dx$ gefunden werden, so setze man $x = \frac{\pi}{2} - y$, so erhält man:

$$-\int(\sin y)^n dy = \int(\cos x)^n dx = -\frac{\cos y.\sin y^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\cdot\int\sin y^{n-2}dy$$

also: $\int(\cos y)^n dy = \frac{\sin y\cos y^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int\cos y^{n-2}dy$, oder, wenn man wieder y in x umsetzt, folgt:

II. $\int(\cos x)^n dx = \frac{\sin x \cos x^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos x^{n-2} dx$

Wendet man die Formeln I u. II, wiederholt an, so ergeben, wenn 1) n gerade.

$$\int(\sin x)^n dx = -\frac{\cos x}{n}\left(\sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\sin x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin x^{n-5} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{1.3.5\cdots(n-3)(n-1)}{1.2.4\cdots(n-4)(n-2)}\sin x\right) + \frac{1.3\cdots(n-3)(n-1).x}{1.2\cdots(n-4)(n-2).n} + Const.$$

und:

$$\int(\cos x)^n dx = \frac{\sin x}{n}\left(\cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\cos x^{n-3} + \dots + \frac{1.3.5\cdots(n-3)(n-1)}{1.2.4\cdots(n-4)(n-2)}\cos x\right)$$
$$+ \frac{1.3.5\cdots(n-5)(n-1)}{2.4\cdots(n-4)(n-2)n} x + Const.$$

2. für n ungerade

$$\int(\sin x)^n dx = -\frac{\cos x}{n}\left(\sin x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\sin x^{n-3} + \dots + \frac{1.2.4\cdots(n-3)(n-1)}{1.3.5\cdots(n-4)(n-2)}\right)$$

und:

$$\int(\cos x)^n dx = \frac{\sin x}{n}\left(\cos x^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}\cos x^{n-3} + \dots + \frac{1.2.4\cdots(n-3)(n-1)}{1.3.5\cdots(n-4)(n-2)}\right)$$

Ebenfalls erhält man auch das Integral $\int(tg\, x)^n dx$, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Denn es ist: $tg\, x^n dx = tg\, x^{n-2}\frac{dx}{\cos x^2}\sin x^2 = tg\, x^{n-2}\frac{dx}{\cos x^2} - tg\, x^{n-2} dx$ folgt, wenn man integrirt:

$$\int tg\, x^n dx = \frac{tg\, x^{n-1}}{n-1} - \int tg\, x^{n-2} dx$$

Wendet man diese Reductionsformel wiederholt an, so wird man, wenn n gerade ist zuletzt auf $\int dx = x$, u. wenn n ungerade ist auf $\int tg\, x\, dx$, welches letztere Integral schon weiter oben $= \frac{1}{2} l(\cos x^2)$ gefunden worden ist, gelangen. Und man erhält alsdann für

$$\int tg\, x^n dx = \frac{tg\, x^{n-1}}{n-1} - \frac{tg\, x^{n-3}}{n-3} + \frac{tg\, x^{n-5}}{n-5} - \dots \pm tg\, x \mp x$$

und für 2.(n ungerade)

$$\int tg\, x^n dx = \frac{tg\, x^{n-1}}{n-1} - \frac{tg\, x^{n-3}}{n-3} + \dots \pm \frac{tg\, x^2}{2} \mp \frac{1}{2} l(\cos x^2)$$

Verlangt man Formeln für $\int\frac{dx}{tg\, x^n}$, also für ein negatives n, so ist $x = \frac{\pi}{2} - y$, in den beiden obigen Formeln zu setzen u. alsdann y durch x wieder auszudrücken.

Wir gehen nun zu einer allgemeinen Aufgabe über, indem wir uns mit der Integration des Products $\sin x^m \cos x^n$ beschäftigen, wobei m u. n nicht ganze positive Zahlen sein müssen. Wir suchen vor allen Dingen das Differenzial $\sin x^m \cos x^n dx$ in ein algebraisches zu verwandeln und erreicht, wenn man setzt: $\sin x = \sqrt{z}$, denn alsdann ist $\cos x\, dx = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$ und: $\sin x^m \cos x^n dx = z^{\frac{m}{2}}(1-z)^{\frac{n-1}{2}}\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2} z^{\frac{m-1}{2}}(1-z)^{n}$ welcher Ausdruck genau die Form des bin. Differenzials $z^r(az^q+b)^p dz$ hat. Es ist dabei $r = \frac{m-1}{2}$, $q = 1$, $p = \frac{n-1}{2}$, $a = -1$, $b = +1$

Das bin. Differenzial aber läßt sich bekanntlich rational darstellen, wenn entw.: p, od. $\frac{r+1}{q}$, od. $\frac{r+1}{q}+p$ eine ganze, positive od. neg. Zahl gibt. Trägt man diese Bedingungen auf den vorliegenden Fall über, so findet man, daß entweder:

$\frac{m-1}{2}$, od. $\frac{m+1}{2}$, od. $\frac{m+n}{2}$ ein solches Resultat gibt.

Also immer, wenn entw. m od. n eine ungerade Zahl ist, zB. Man habe: $\int \sin x^2 \sqrt[3]{tg\,x}\,.dx$. Der Ausdruck unter dem Integralzeichen ist:

$$= \sin x^{\frac{7}{3}} \cos x^{-\frac{1}{3}}\,dx, \text{ also: } \left.\begin{matrix} m=\frac{7}{3} \\ n=-\frac{1}{3}\end{matrix}\right\} \frac{m+n}{2}=1$$

und das Integral läßt sich daher finden.

Man setze nun zunächst: $\sin x = \sqrt{z}$, so geht das Integral über in: $= \frac{1}{2}\int z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{2}{3}}\,dz$. Dieses Diff. mache man nun nach der für das bin. Diff. angegeb. Substitution rational, was erreicht wird, wenn man setzt: $1-z = z.t^3$, also $z = \frac{1}{1+t^3}$, $dz = \frac{-3t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$, so wird man erhalten:

$$= -\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1+t^3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1+t^3}{t^3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,.dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{(1+t^3)^2}$$

Da $1+t^3 = (1+t)(t^2-t+1)$, kann man setzen:

$$\frac{1}{(1+t^3)^2} = \frac{1}{(t+1)^2(t^2-t+1)^2} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{(t^2-t+1)^2} + \frac{Et+F}{t^2-t+1}$$

Entfernt man die Brüche, führt die Multiplication aus und vergl. die Coefficienten der gl. Potenzen v. t auf beiden Seiten, so wird man finden:

$A=\frac{1}{9}$, $B=\frac{2}{9}$, $C=-\frac{1}{3}$, $D=\frac{1}{3}$, $E=-\frac{2}{9}$, $F=\frac{1}{3}$ so daß also ist

$$\frac{1}{(1+t^3)^2} = \frac{1}{9(1+t)^2} + \frac{2}{9(1+t)} + \frac{-t+1}{3(t^2-t+1)^2} + \frac{-2t+3}{9(t^2-t+1)},$$

wovon nun jedes Glied nach den früheren allgemeinen Formeln integr. werden kann. — Häufig gelangt man schneller zu dem Integral, wenn man sich erinnert, nur der vorliegenden der für das bin. Diff. gef. Reductionsformeln bedient. Hier ist die Formel D. anzuwenden, welche heißt:

$$\int\frac{x^m}{(ax^n+b)^p}.dx = \frac{x^{m+1}}{bn(p-1)(ax^n+b)^{p-1}} - \frac{m+n-np+1}{bn(p-1)}.\int\frac{x^m}{(ax^n+b)^{p-1}}.dx$$

und dabei ist: $m=0$, $n=3$, $p=2$, $a=b=1$, $x=t$; daher

$$\int\frac{dt}{(t^3+1)^2} = \frac{t}{3(t^3+1)} + \frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^3+1}$$ Nun setze man:

$\frac{1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$, oder: $1 = A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)$, (woraus für $t=-1$, $A=\frac{1}{3}$) oder:

$1 = (A+B)t^2 + (-A+B+C)t + A + C$ daher. $1 = A+C$ woraus $C=\frac{2}{3}$

$0 = -A+B+C$, woraus $B=-\frac{1}{3}$, $0 = A+B$ ... folglich

$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3(t+1)} + \frac{-t+2}{3(t^2-t+1)}$ und, wenn man nun integrirt

$$\int\frac{dt}{t^3+1} = \frac{1}{3}\,l(1+t) + \frac{1}{3}\int\frac{-t+2}{t^2-t+1}.dt.$$

Nach der Formel: $\int \frac{mt+n}{at^2+2bt+c}\,dt = \frac{m}{2a}\, l(at^2+2bt+c) + \frac{an-bm}{a\sqrt{ac-b^2}}\, \operatorname{arctg}\frac{at}{\sqrt{ac}}$ welche für $b^2-ac<0$ gilt, erfolgt:

$$\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt = -\frac{1}{2}\, l(t^2-t+1) + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + Const.$$

Substituirt man nun, so findet man schließlich

$$\int \frac{dt}{(t^3+1)^2} = \frac{t}{3(t^3+1)} + \frac{2}{9}\, l(t+1) - \frac{1}{9}\, l(t^2-t+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + Const$$

Unser ursprüngliches Integral wird also:

$$\int \sin x^2 \sqrt[3]{tg\, x}\cdot dx = -\frac{t}{2(t^3+1)} - \frac{1}{3}\, l(t+1) + \frac{1}{6}\, l(t^2-t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}} +$$

Da wir gesetzt hatten: $1-z = z\cdot t^3$ und $\sqrt{z} = \sin x$, so ist: $t = \sqrt[3]{\frac{1-z}{z}} = \sqrt[3]{\frac{1-\sin x^2}{\sin x^2}} = \frac{1}{(tg\, x)^{\frac{2}{3}}} = (ctg\, x)^{\frac{2}{3}}$; folglich:

$$\int \sin x^2 \sqrt[3]{tg\, x}\, dx = \frac{1}{2}\sin x^2 (ctg\, x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\, l\left(1+(ctg\, x)^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{1}{6}\, l\left(ctg\, x\sqrt[3]{ctg\, x} - (ctg\, x)^{\frac{2}{3}} + 1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2(ctg\, x)^{\frac{2}{3}}-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Da sich das Integral $\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx$, wie nun gezeigt worden ist, auf das bin. Diff. zurückführen läßt, so könnte man damit die Betrachtung schließen, u. was die ~~Ergänzung~~ wechselweise Verminderung resp. Ergänzung der Exponenten m u. n betrifft, die für das Bin. Diff. aufgestellten ~~diff~~ Reductionsformeln in Anwendung bringen. Es ist jedoch für den Gebrauch weit angenehmer, dieses Integral ohne Einführung einer Hilfsgröße z unmittelbar zu reduciren, nämlich Formeln aufzustellen, wodurch m u. n vermindert u. vermehrt werden können. Diese Formeln sind selbst in denjenigen Fällen, in welchen sich das Integral in endlicher Form finden läßt, der Methode der Transformation vorzuziehen. — Diese 6 Reductionsformeln ergeben sich sehr leicht auf folgende Weise: Man schreibe:

$$\sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = \sin x^{m-1} \cdot \cos x^n \cdot \sin x \cdot dx$$

und integrire theilweise, indem man setzt:

$u = \sin x^{m-1}$; $dv = \cos x^n \cdot \sin x \cdot dx$, so ist: $du = (m-1)\sin x^{m-2} \cdot \cos x\, dx$ und $v = -\frac{\cos x^{n+1}}{n+1}$, daher erhält man:

E. $$\int \sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx = -\frac{\sin x^{m-1}\cos x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin x^{m-2} \cdot \cos x^{n+2} \cdot dx$$

Durch diese Formel wird m um 2 Einheiten vermindert und n um 2 vermehrt. Aus ihr fließen alle folgenden Formeln, nämlich: Soll m um 2 vermindert werden u. n unverändert bleiben, so bemerke man, daß $\sin x^{m-2} \cdot \cos x^{n+2} = \sin x^{m-2} \cdot \cos x^n - \sin x^m \cdot \cos x^n$ ist und daß also das zweite Glied der Formel E. sich schreiben läßt:

$$= \frac{m-1}{n+1}\int \sin x^{m-2} \cdot \cos x^n \cdot dx - \frac{m-1}{n+1}\int \sin x^m \cos x^n \cdot dx.$$

Bringt man nun das letztere Integral auf die linke Seite und dividirt die Gl. durch $\frac{m+n}{n+1}$, so wird man erhalten:

A. $\int \sin x^m \cos x^n . dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin x^{m-2} \cos x^n . dx$

2. Soll m unverändert bleiben, dagegen n vermindert werden, so setze man in A. $x = \frac{\pi}{2} - y$, verwandle m in n und n in m u. setze nachher wieder x für y, so wird man finden

B. $\int \sin x^m \cos x^n . dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin x^m \cos x^{n-2} dx$

3. Soll m vermehrt werden, n aber unverändert bleiben, so kehre man die Formel A. um, so hat man:

$\int \sin x^{m-2} \cos x^n . dx = \frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m-1} + \frac{m+n}{m-1} . \int \sin x^m \cos x^n . dx$

Man setze hierin $m-2 = -m$, und lasse nach geschehener Versetzung den Accent wieder weg, so findet man

$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} . dx = -\frac{\cos x^{n+1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos x^n}{\sin x^{m-2}} . dx$ C.

4. Soll n vermehrt werden, dagegen m unverändert bleiben, so kehre man die Formel B. um, und setze $n-2 = -n$, und lasse nachher wieder den Accent weg, so findet man auf ähnliche Weise, wie oben:

$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} . dx = \frac{\sin x^{m+1}}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin x^m}{\cos x^{n-2}} . dx$ D.

5. Sollen m und n gleichzeitig vermindert werden, so setze man in der Formel E. $n = -n$, u. lasse den Accent dann wieder weg, so ergibt sich

$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} . dx = \frac{\sin x^{m-1}}{(n-1)\cos x^{n-1}} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin x^{m-2}}{\cos x^{n-2}} . dx$. E.

6. Sollen m u. n gleichzeitig vermindert werden, wenn beide negativ sind, so setze man in der Formel E. $x = \frac{\pi}{2} - y$ vertausche m mit n, u. n mit m, u. setze alsdann wieder x für y, so wird man bekommen:

$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} . dx = -\frac{\cos x^{n-1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} - \frac{n-1}{m-1} . \int \frac{\cos x^{n-2}}{\sin x^{m-2}} . dx$ F.

Diese Reductionsformeln werden unbrauchbar, wenn $m = -n$, oder $m = 1$, oder $n = 1$ wird;
In diesen Fällen gelangt man zu Integralen, welche wir schon oben ermittelt haben. z.B. Man soll $\int \sin x^2 \cos x^3 . dx$ finden. In der Formel A. ist: $m = 2$, $n = 3$, zu setzen, dann ergibt sich

$= -\frac{\sin x . \cos x^4}{5} + \frac{1}{5}\int \cos x^3 . dx$

In B. setze man endlich $m = 0$, & $n = 3$, so hat man:

$\int \cos x^3 . dx = \frac{\sin x \cos x^2}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x \, dx$, also wenn man einsetzt:

$\int \sin x^2 \cos x^3 . dx = -\frac{\sin x \cos x^4}{5} + \frac{\sin x \cos x^2}{15} + \frac{2}{15}\sin x + Const.$

Man habe $\int\frac{\sin x^2}{\cos x^3}.dx$. In der Formel E. setze man $m=2$, $n=3$, so findet man sogleich $= \frac{\sin x}{2\cos x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos x}$

Da nun aber $\int\frac{dx}{\cos x} = -l\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$; so ist auch

$$\int\frac{\sin x^2}{\cos x^3}.dx = \frac{\sin x}{2\cos x^2} - \frac{1}{2}\,l\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + Const.$$

Es sei ferner gegeben: $\int\frac{dx}{\cos x^4}$. Nach der Formel D. in welcher $m=0$, und $n=4$ zu setzen ist, erhält man

$$\int\frac{dx}{\cos x^4} = \frac{\sin x}{3\cos x^3} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{\cos x^2} = \frac{\sin x}{3\cos x^3} + \frac{2}{3}\,tg\,x + C$$

Man habe noch $\int\frac{\sqrt[3]{ctg\,x}}{\sin x^2}.dx = \int\frac{\cos x^{\frac{1}{3}}}{\sin x^{\frac{7}{3}}}.dx$. Nach der Formel C. findet man hierfür sogleich

$$= -\frac{3}{4}.\frac{\cos x^{\frac{4}{3}}}{\sin x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{ctg\,x^4},$$ was sich auch nach der Abschn. sogleich ergeben hätte.

Für das Integral $\int\frac{dx}{\sin x^m\cos x^n}$ stellen wir keine besondere Reduktionsformel auf, indem es sich durch folgende Verwandlung auf die früheren Formeln reduciren läßt: Offenbar ist

$$\frac{1}{\sin x^m\cos x^n} = \frac{\sin x^2+\cos x^2}{\sin x^m.\cos x^n} = \frac{1}{\sin x^{m-2}.\cos x^n} + \frac{1}{\sin x^m.\cos x^{n-2}}$$

Verfährt man nun mit jedem dieser zwei Brüche auf gleiche Weise, indem man jeden mit $\sin x^2+\cos x^2$ multiplicirt, so sieht man, daß durch Wiederholung dieses Verfahrens eine Reihe von Brüchen entsteht, welche sich nach den Formeln C. u. D. alsdann reduciren lassen.

Z.B. $\int\frac{dx}{\sin x^3\cos x^2} = \int\frac{dx}{\sin x.\cos x^2} + \int\frac{dx}{\sin x^3} = \int\frac{\sin x}{\cos x^2}.dx + \int\frac{dx}{\sin x} + \int\frac{dx}{\sin x^3}$

Nach der Formel D. ist nun:

$$\int\frac{\sin x}{\cos x^2}.dx = \frac{\sin x^2}{\cos x} - \int\sin x\,dx = \frac{\sin x^2}{\cos x} + \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

Nach der Formel C. ist ferner $\int\frac{dx}{\sin x^3} = -\frac{\cos x}{2\sin x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}$ folglich wenn man einsetzt:

$$\int\frac{dx}{\sin x^3\cos x^2} = -\frac{\cos x}{2\sin x^2} + \frac{3}{2}\,l\,tg\frac{x}{2} + \sec x + Const$$

Ist $n=m$, so kann man das Integral auf die frühere Form bringen, denn man hat alsdann:

$$\int\frac{dx}{\sin x^m\cos x^m} = 2^m\int\frac{dx}{\sin 2x^m} = 2^{m-1}\int\frac{dz}{\sin z^m},$$ wenn man $2x=z$ setzt, welches Integral nun nach der Formel C reducirt werden kann. Es ist klar, daß die Formeln A. u. B. nur deshalb angewendet werden für resp. $m=0$ u. $n=0$, auf diese Integrale $\int\cos x^n dx$, $\int\sin x^m dx$ zu denen Formeln führen würden. Es ist zu bemerken, daß die Formeln C. und D. auch

Reductionsformeln liefern für die speciellen Integrale $\int\frac{dx}{\sin x^m}$ und $\int\frac{dx}{\cos x^n}$; denn setzt man in C. $n=0$ und in D. $m=0$, so ergibt sich sogleich:

$$\int\frac{dx}{\sin x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\sin x^{m-2}},$$ und ferner

$$\int\frac{dx}{\cos x^n} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\int\frac{dx}{\cos x^{n-2}}.$$ Diese 2 Formeln ersetzen die früheren für den Fall, daß in ihnen m u. n negativ sind. — Ist in den Formeln E. und F. $n=m$, so führen sie auf die früheren Ausdrücke, welche wir für die Integrale $\int tg\,x^n.dx$ u. $\int ctg\,x^n dx$ gefunden haben.

Sind die Exponenten m u. n keine ganzen Zahlen, so führt die wiederholte Anwendung der Reductionsformeln im Allgemeinen fast immer auf unendliche Reihen, welche oft recht brauchbar sind. Ein Beispiel hierfür mag genügen; Man habe: $\int\sqrt{\cos x}.dx$. Setzt man in die Formel D. $m=0$, u. $n=-\frac{1}{2}$ u. wendet dieselbe beliebig oft an so findet man nach einander:

$$\int\sqrt{\cos x}\,dx = -\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\cos x} + \frac{5}{3}\cdot\int\frac{dx}{\cos x^{-\frac{5}{2}}};$$ ferner:

$$\int\frac{dx}{\cos x^{-\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{7}\sin x\cos x^3\sqrt{\cos x} + \frac{9}{7}\int\frac{dx}{\cos x^{-\frac{9}{2}}}$$ Setzt man ein, so ergibt sich nach einigen Reduct.:

$$\int\sqrt{\cos x}\,dx = -\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\cos x}\left(1+\frac{5}{7}\cos x^3+\frac{5\cdot9}{7\cdot11}\cdot\cos x^5+\frac{5\cdot9\cdot13}{7\cdot11\cdot15}\cdot\cos x^7+\dots\right)$$

welche Reihe schnell convergirt. Das weggelassene Restintegral nähert sich mit wachsendem n der 0, weil die Function unter dem Integral [illegible]. Diesen Umstand werden wir alsbald erörtern. —

Die beiden Integrale: $\int x^m\sin x\,dx$ u. $\int x^n\cos x\,dx$ können sofort, wenn m u. n positive ganze Zahlen sind, kann man sie immer finden, und zwar auf folgende Weise: In dem ersteren Integral setze man: $u=x^m$, $dv=\sin x\,dx$, und im zweiten $u=x^n$, $dv=\cos x\,dx$ und integrire theilweise so wird man die folgenden 2 Gleichungen erhalten:

$$\int x^m\sin x\,dx = -x^m\cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx \qquad (\underline{m.})$$

$$\int x^n\cos x\,dx = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx \qquad (\underline{n.})$$

Setzt man in der Formel (m.) $m=m-1$, und in (n.) $n=n-1$ so findet man zwei weitere Formeln, nämlich:

$$\int x^{m-1}\cos x\,dx = x^{m-1}\sin x - (m-1)\int x^{m-2}\sin x\,dx,$$ und:

$$\int x^{n-1}\sin x\,dx = -x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x\,dx.$$ Eliminirt man mit Hülfe dieser, die Integrale rechter Hand in den Formeln (m.) u. (n.), so erhält man die folgenden 2 Reduct. Formeln:

$$\underline{M.}\quad \int x^m\sin x\,dx = -x^m\cos x + m x^{m-1}\sin x - m(m-1)\int x^{m-2}\sin x\,dx$$ und

$$\underline{N.}\quad \int x^n\cos x\,dx = x^n\sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)\int x^{n-2}\cos x\,dx$$

Es seien m u. n zwei ganze positive Zahlen; Man wende die

Reduktionsformeln M und N so oft an, bis kein Integral mehr übrig bleibt, dann findet man die Formeln

$$\int x^m \sin x \cdot dx = -\cos x\left(x^m - m(m-1)x^{m-2} + m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4} - \ldots\right)$$
$$+ \sin x\left(m x^{m-1} - m(m-1)(m-2)\cdot x^{m-3} + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)x^{m-5} \ldots\right)$$

Dann:

$$\int x^n \cos x\, dx = \sin x\left(x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \ldots\right)$$
$$+ \cos x\left(n x^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \ldots\right)$$

Bsp. Man habe: $m=3$ u. $n=4$, so ist:

$$\int x^3 \sin x\, dx = -\cos x(x^3 - 6x) + 3\sin x(x^2 - 2).$$ Ebenso findet
$$\int x^4 \cos x\, dx = \sin x(x^4 - 12x^2 + 24) + 4\cos x(x^3 - 6x)$$

Wenn die Exponenten m u. n negativ sind, so muss man, um dieselben zu verringern, andere Reductionsformeln aufstellen, welche man erhält, wenn man nun bei den theilweisen Integrationen, statt nach der trig. Function, nach der Potenz v. x integrirt, und nach der ersteren differenzirt. Man setze nämlich in

$\int \frac{\sin x}{x^m} \cdot dx$ und $\int \frac{\cos x}{x^n} \cdot dx$, resp: $u = \sin x$ u. $dv = \frac{dx}{x^m}$; $u = \cos x$, $dv = \frac{dx}{x^n}$, so ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\int \frac{\sin x}{x^m} \cdot dx = -\frac{\sin x}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{\cos x}{x^{m-1}} \cdot dx \quad (m.)$$ und
$$\int \frac{\cos x}{x^n} \cdot dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}} \cdot dx \quad (n.)$$

Setzt man in der ersteren dieser beiden Formeln $m = n-1$, und in der andern $n = m-1$, und eliminirt vermittelst der 2 hieraus folgenden Gl. die Integr. rechts in (m.) u. (n.), so findet man die beiden Red.formeln

$$\int \frac{\sin x}{x^m} \cdot dx = -\frac{(m-2)\sin x + x\cos x}{(m-1)(m-2)\,x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)(m-2)} \int \frac{\sin x}{x^{m-2}} \cdot dx \quad M.$$
$$\int \frac{\cos x}{x^n} \cdot dx = \frac{(n-2)\cos x - x\sin x}{(n-1)(n-2)\,x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos x}{x^{n-2}} \cdot dx \quad N.$$

Sind m und n positive gerade Zahlen, so wird man vermittelst der Formeln (m.) u. (n.) das Integral auf $\int \frac{\cos x}{x} dx$ u. $\int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$ bringen, aber nicht weiter, weil die Nenner $m-1$ u. $n-1$ zu 0 würden. Sind m u. n bel. ungerade Zahlen, so werden die Formeln M. u. N. zuletzt auf die Integrale $\int \frac{\sin x}{x} dx$ u. $\int \frac{\cos x}{x} dx$, aber nicht weiter führen, weil die Nenner die Factoren $m-1$ u. $n-1$ enthalten. – Man kann also immer hier die Reduction bis zu den beiden angeführten Integralen treiben, diese sind jedoch in endlicher Form nicht findbar. Ihre Reihenentw. haben wir früher schon angegeben. Sie bilden eigenthümliche Transcendenten u. treten sehr häufig auf; sie erhielten in neuerer Zeit die curiosen Namen: „Integral-sinus u. Integral-cosinus“

B. Integration von Ausdrücken, welche Exponential-funktionen enthalten.

Von den vielerlei Formen, in welchen diese auftreten heben wir nur einige der wichtigsten hervor u. beginnen sogleich mit dem Integral $\int x^n \cdot e^{kx} \cdot dx$. Man setze $u = x^n$ und $dv = e^{kx} dx$, so ist $du = nx^{n-1} dx$ und $v = \frac{1}{k} \cdot e^{kx}$. Folglich erhält man durch theilweise Integration die Reductionsformel: $\int x^n e^{kx} dx = \frac{x^n}{k} \cdot e^{kx} - \frac{n}{k} \int x^{n-1} e^{kx} dx$

Ist n eine ganze pos. Zahl, so wird man durch $n$maliger Anwendung dieser Formel erhalten:

$$\int x^n e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}\left(x^n - \frac{n}{k} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{k^2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \frac{n(n-1) \cdots 3.2.1}{k^n}\right)$$

Z. B. Es sei: $n = 4$, $k = 1$, so hat man

$$\int x^4 e^x dx = e^x (x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 24x + 24)$$

Ist der Exponent n. x negativ, so muß man die Anwendung der theilweisen Integration in anderer Ordnung vornehmen; man muß nämlich in dem Integral $\int \frac{e^{kx} dx}{x^n}$ setzen: $u = e^{kx}$ u. $dv = \frac{dx}{x^n}$, so ist $du = k \cdot e^{kx} dx$, und $v = -\frac{1}{(n-1) x^{n-1}}$; Man erhält dann die Reductionsformel:

$$\int \frac{e^{kx} dx}{x^n} = -\frac{e^{kx}}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{k}{n-1} \int \frac{e^{kx} dx}{x^{n-1}}$$

Die wiederholte Anwendung dieser Formel gibt:

$$\int \frac{e^{kx} dx}{x^n} = -\frac{e^{kx}}{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{k}{(n-2) x^{n-2}} + \frac{k^2}{(n-2)(n-3) x^{n-3}} + \cdots + \frac{k^{n-2}}{(n-2)(n-3) \cdots 1}\right) + \frac{k^{n-1}}{(n-1)(n-2) \cdots 1} \int \frac{e^{kx} dx}{x}$$

Das übrig bleibende Integral, welches für $kx = z$ in das Integral $\int \frac{e^z dz}{z}$ übergeht, kann nicht weiter reducirt werden und bildet eine eigenthümliche Transcendente. Setzt man noch $z = lt$, so ist $dz = \frac{dt}{t}$, $e^z = t$ und das Integral geht über in $\int \frac{dt}{lt}$ und in dieser Form erhielt es von Bessel den Namen „Integral-Logarithmus". Die Entwicklung dieses Log. Integr. in der Form: $\int e^z \frac{dz}{z}$ wurde früher schon aufgestellt.

Aus den obigen beiden Formeln lassen sich neue und allgemeinere ableiten, wenn man sich des Imaginären bedienen will. Man setze nämlich $k = k_1 + \alpha\sqrt{-1}$, wobei k_1 und α reelle Constanten sein sollen. Man lasse nach geschehener Substitution den Index von k wieder weg, so wird sich aus der ersten unserer beiden Formeln mit Rücksicht auf die Gleichung: $e^{kx + \alpha x\sqrt{-1}} = e^{kx}(\cos \alpha x + \sqrt{(-1)} \sin \alpha x)$. die folgende ergeben.

$$\int x^n e^{kx}(\cos \alpha x + \sqrt{(-1)} \sin \alpha x) dx = \frac{(\cos \alpha x + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha x) e^{kx}}{k + \alpha\sqrt{-1}} \cdot \left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{k + \alpha\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(k + \alpha\sqrt{-1})^2} - \cdots\right)$$

oder, wenn man die Nenner reel macht,

$$= \frac{e^{kx}(k \cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x + \sqrt{-1}(k \sin \alpha x - \alpha \cos \alpha x))}{k^2 + \alpha^2} \cdot \left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{k^2 + \alpha^2}(k + \alpha\sqrt{-1}) + \frac{n(n-1) x^{n-2}}{(k^2 + \alpha^2)^2}(k - \alpha\sqrt{-1})^2 - \cdots\right)$$

Denkt man sich die Multiplication ausgeführt u. das Reale von dem Imaginären ausführen, so wird sich die Gleichung in zwei zerlegen wovon eine die Entwicklung des Integrals $\int x^n e^{kx} \cos x \cdot dx$ die andere die des Integrals $\int x^n e^{kx} \sin x \cdot dx$ darstellt. Setzt $n=0$ so erhält man auf diese Art:

$$\int e^{kx} \cos \alpha x \cdot dx = \frac{e^{kx}(k\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x)}{k^2+\alpha^2}$$

$$\int e^{kx} \sin \alpha x \cdot dx = \frac{e^{kx}(k\sin\alpha x - \alpha\cos\alpha x)}{k^2+\alpha^2}$$

, welche Gleichungen früher erhaltenen vollständig übereinstimmen. Auf ähnliche Weise lässt sich bei der zweiten Formel, welche sich auf das Integral $\int e^{kx} \frac{dx}{x^n}$ bezieht ~~die Integrale~~ verfahren und man überzeugt sich, dass dadurch die Integrale $\int e^{kx} \cos\alpha x \frac{dx}{x^n}$ u. $\int e^{kx} \sin\alpha x \frac{dx}{x^n}$ auf 2 andere reducirt werden, bei welchen $n=1$ ist. — Wir gehen zur Betrachtung einer andern Gattung v. Integralen über, nämlich der Integrale

$\int e^{kx} (\cos\alpha x)^n dx$ und $\int e^{kx} (\sin\alpha x)^n dx$, worin n eine ganze positive Zahl bezeichnen soll. Um hier für Reductionsformeln zu finden wende man das Verfahren der theilweisen Integration 2 Mal nach einander an u. setze: $u = (\cos\alpha x)^n$ und $dv = e^{kx} dx$ so findet man: $\int e^{kx} (\cos\alpha x)^n dx = \frac{e^{kx}}{k}(\cos\alpha x)^n + \frac{n\alpha}{k}\int e^{kx}(\cos\alpha x)^{n-1} \sin\alpha \cdot dx$ ferner setze man: $u = (\cos\alpha x)^{n-1} \sin\alpha x$, $dv = e^{kx} dx$, so wird man erhalten.

$$\int e^{kx} (\cos\alpha x)^{n-1} \sin\alpha x \, dx = \frac{e^{kx}}{k} \cdot (\cos\alpha x)^{n-1} \sin\alpha x - \frac{\alpha}{k} \int e^{kx} ((\cos\alpha x)^n - (n-1)(\cos\alpha x)^{n-2} \sin\alpha x^2) dx$$

Oder da $\cos\alpha x^{n-2} \sin\alpha x^2 = \cos\alpha x^{n-2} - \cos\alpha x^n$ ist, wenn man rückwärts einsetzt und reducirt, die Reductionsformel:

$$\int e^{kx} \cos\alpha x^n dx = \frac{e^{kx}(k\cos\alpha x + n\alpha\sin\alpha x)\cos\alpha x^{n-1}}{k^2+n\alpha^2} + \frac{n(n-1)\alpha^2}{k^2+n\alpha^2} \int e^{kx} \cos\alpha x^{n-2} dx$$

Auf ganz gleiche Weise findet man:

$$\int e^{kx} \sin\alpha x^n dx = \frac{e^{kx}(k\sin\alpha x - n\alpha(\cos\alpha x))\sin\alpha x^{n-1}}{k^2-n\alpha^2} + \frac{n(n-1)\alpha^2}{k^2+n\alpha^2} \cdot \int e^{kx} \sin\alpha x^{n-2} dx$$

Für $n=1$ hat man: werden die 2 vorhin angeführten Formeln. Diese 2 Formeln lassen sich benützen um das Integral $\int e^{k\arcsin x} dx$ zu finden. Denn setzt man $\arcsin x = z$, so ist $x = \sin z$, $dx = \cos z \cdot dz$; folglich unser Integral: $\int e^{kz} \cos z \cdot dz$; setzt man $x = z$, $\alpha = 1$, so folgt man aus den beiden angeführten Formeln:

$$\int e^{kz} \cos z \cdot dz = \frac{e^{kz}(k\cos z + \sin z)}{k^2+1}$$; und wenn man x restituirt

$$\int e^{k\arcsin x} dx = \frac{e^{k\arcsin x}(k\sqrt{1-x^2}+x)}{k^2+1} + C.$$ Das Integral $\int x^x dx$ lässt sich weder in endlicher Form, noch nach einer rein nach Potenzen v. x fortschreitenden Reihe entwickeln, wie dies größtentheils der Fall ist bei transcendentalen [illegible]

bei welchen die Basis und der Exponent Functionen von x sind. Wir haben es unterlassen die auf diese sich beziehenden Formeln unter die Grundformeln aufzunehmen, weil derartige Integrale sehr selten vorkommen, u. die Grundformel sehr complicirt ist. Sie mag nachträglich hier ihren Platz finden.

Es seien $f(x)$ u. $\varphi(x)$ zwei willkürliche Functionen u. $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Man differenzire diese Glg logarithmisch, so ergibt sich

$$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)\cdot l f(x) + \varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)},$$ und daraus:

$$\frac{d f(x)^{\varphi(x)}}{dx} = f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left(\varphi'(x)\, l f(x) + \varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right),$$ folglich wenn man integr. die Grundformel:

$$\int f(x)^{\varphi(x)}\cdot\left(\varphi'(x)\, l f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)dx = f(x)^{\varphi(x)} + C$$

Beispiele: 1. Man soll $\int x^x(1+lx)\,dx$ finden.
Hier ist in obiger Grundformel $f(x) = x$ u. $\varphi(x) = x$, also da die Klammergrößen übereinstimmt, ist das gegebene Integral $= x^x + Const.$

2. Man soll $\int e^{x^x}\cdot x\,dx$ finden. Hier ist $f(x) = e^x$; $\varphi(x) = x$ die Klammergr. wird $= 2x$, also hat man:

$$\int e^{x^x}\cdot x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^x} + C$$

Für unseren Gebrauch reichen die oben für die exponentiellen Functionen gegebenen Formeln aus und wir bemerkten nur, daß man meistens zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht nehmen muß, wenn andere Fälle vorkommen.

C. Integration der Ausdrücke, in welchen Bogen trig. Functionen vorkommen

Wir beschäftigen uns auch hier nur mit den am häufigsten vorkommenden Ausdrücken, nämlich mit den Formen:
Es sei m eine ganze positive Zahl und man soll das Integral $\int(\arcsin x)^m\cdot dx$ finden. Setzt man $u = (\arcsin x)^m$; $dv = dx$, so erhält man: $\int(\arcsin x)^m\cdot dx = x(\arcsin x)^m + m\int(\arcsin)^{m-1}\cdot\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
Nun setze man $u = (\arcsin x)^{m-1}$ u. $dv = \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; dann erfolgt:

$$\int(\arcsin)^{m-1}\cdot\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin)^{m-1} - (m-1)\int(\arcsin x)^{m-2}\cdot dx$$

folglich erhält man, wenn man substituirt, die Reductionsformel:

$$\int(\arcsin x)^m\cdot dx = (x\arcsin x + m\sqrt{1-x^2})\cdot(\arcsin x)^{m-1} - m(m-1)\int(\arcsin x)^{m-2}\cdot dx$$

Auf gl. Weise erhält man auch:

$$\int(\arccos x)^n\cdot dx = (x\arccos x - n\sqrt{1-x^2})\cdot(\arccos x)^{n-1} - n(n-1)\cdot\int(\arccos x)^{n-2}\cdot dx$$

Wendet man diese Formeln so oft an, bis kein Integral mehr übrig bleibt, so erhält man, wenn m u. n ganze positive Zahlen sind:

$$\int(\arcsin x)^m\cdot dx = (\arcsin x)^m\cdot\left(x + \frac{m\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \frac{m(m-1)x}{(\arcsin x)^2} - \frac{m(m-1)(m-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^3} + \frac{m(m-1)\cdots(m-3)x}{(\arcsin x)^4} + \cdots\right)$$

$$\int(\arccos x)^n\cdot dx = (\arccos x)^n\cdot\left(x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arccos x} - \frac{n(n-1)x}{(\arccos x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)x}{(\arccos x)^4} - \cdots\right)$$

Man hätte diese Formeln auf frühere zurückführen können, denn setzt man $\arcsin x = z$, $\arccos x = y$, so ist $x = \sin z$ u. $x = \cos y$, $dx = \cos z \cdot dz$ u. $dx = -\sin y \cdot dy$; folglich

$$\int (\arcsin x)^m dx = \int z^m \cos z \cdot dz \quad \text{und} \quad \int (\arccos x)^n dx = -\int y^n \sin y\, dy$$

Specielle. Es sei $m = 1$, u. $n = 2$; so hat man:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad \text{und:}$$

$$\int (\arccos x)^2 dx = x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{(1-x^2)}\arccos x - 2x + C$$

Häufig hat man für ganze positive Werthe v. m u. n die I[ntegrale] $\int x^m \arcsin x \cdot dx$ u. $\int x^n \arccos x \cdot dx$ anzugeben. Sie lassen sich bald auf 2 frühere zurückführen. Man setze nämlich $\arcsin x = z$ daher $x = \sin z$, u. $\arccos x = y$, daher $x = \cos y$. So erhält man: $\int x^m \arcsin x \cdot dx = \int \sin z^m \cdot z \cdot \cos z \cdot dz$; macht man hierin $u = z$, und $dv = \sin z^m \cos z \cdot dz$, so erhält man: $\int x^m \arcsin x\, dx = z \frac{\sin z^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int$ ...

Ebenso findet man: $\int x^n \arccos x\, dx = \int \cos y^n \cdot y \cdot -\sin y\, dy$; setzt man: $u = y$ u. $dv = -\cos y^n \sin y\, dy$, so erfolgt:

$$\int x^n \arccos x\, dx = y \frac{\cos y^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \cos y^{n+1} dy$$

Endlich wollen wir uns das Integral $\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx$ vorführen. Setzt man darin $u = \operatorname{arctg} x$ u. $dv = x^n dx$, so erhält man

$$\int x^n \operatorname{arctg} x \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{n+1} \cdot \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1+x^2}$$

Um diese Formel auszuführen, muss man unterscheiden ob n gerade od. ungerade ist. 1, n gerade. Dies:

$x^{n+1} : x^2+1 = x^{n-1} - x^{n-3} + x^{n-5} \ldots \ldots \pm x \mp \frac{x}{x^2+1}$, folglich wenn man integ[rirt]

$$\int x^n \operatorname{arctg} x \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{n+1}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-2}}{n-2} + \frac{x^{n-4}}{n-4} - \ldots \pm \frac{x^2}{2} \mp \frac{l(x^2+1)}{2}\right)$$

2) n ungerade. So ist:

$x^{n+1} : x^2+1 = x^{n-1} - x^{n-3} + \ldots \ldots \pm 1 \mp \frac{1}{x^2+1}$, daher wenn man inte[grirt]

$$\int x^n \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{n+1}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-2}}{n-2} + \frac{x^{n-4}}{n-4} - \ldots \pm x \mp \operatorname{arctg} x\right)$$

Bsp. Es sei: $n=1$, und $n=2$; so hat man, für $n=1$, ein ungerades n erhalten.

$$\int x \operatorname{arctg} x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + \text{Const.} \quad \text{u. für } n=2$$

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \tfrac{1}{2} l(x^2+1)\right) + \text{Const.}$$

Das Integral $\int (\operatorname{arctg} x)^n dx$ kann, selbst, wenn man voraussetzt, es sei n eine ganze positive Zahl nur in dem Fall dargestellt werden, dass $n=1$ ist. Für diesen besondern Fall hat man dann:

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2} l(1+x^2) + \text{Const.}$$

Um im Allgemeinen einen Fall eine Reihenentwickl[ung] zu erhalten, setze man $\operatorname{arctg} x = z$, so ist: $x = \operatorname{tg} z$, $dx = \frac{dz}{\cos z^2}$. Man hat alsdann: $\int (\operatorname{arctg} x)^n dx = \int z^n \frac{dz}{\cos z^2}$, und wenn man theilweise integrirt:

$$= z^n \operatorname{tg} z - n \int z^{n-1} \operatorname{tg} z \cdot dz$$

Um dieses Integral in eine Reihe zu entwickeln, genügt es den Factor $\operatorname{tg} z$ nach Potenzen v. z zu entwickeln. Diese Entwicklg. wollen wir nicht als bekannt voraussetzen, wenn auch den Anlass benützen, um diese mittels Reihe vermittelst Anwendung der Integralrechnung abzuleiten, was auf folgende Weise geschehen kann:

Wir gehen dabei von der Entwicklung des Cos. in ein unendliches Produkt aus, welche sich von selbst darbietet, wenn man bemerkt, daß $\cos z = 0$ wird, bei $z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots$ und $=1$ ist bei $z = 0, 2\pi, 4\pi$, und daß also das Produkt die Faktoren: $1-\frac{2z}{\pi}, 1+\frac{2z}{\pi}; 1-\frac{2z}{3\pi}; 1+\frac{2z}{3\pi}\dots$ enthält, so ergibt sich auf der Stelle die Gleichung:

$$\cos z = \left(1-\frac{2z}{\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{\pi}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi}\right)\dots = \left(1-\left(\frac{2z}{\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{2z}{3\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{2z}{5\pi}\right)^2\right)\dots$$

Differenzirt man diese Gl logarithmisch, so erhält man unmittelbar: $\operatorname{tg} z = 2z\left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2-z^2}+\frac{1}{(\frac{3\pi}{2})^2-z^2}+\frac{1}{(\frac{5\pi}{2})^2-z^2}+\dots\right)$

Man entwickle jeden dieser Brüche nach aufsteigenden Potenzen v. z, ordne alsdann nach diesen Potenzen, so erhält man: $\operatorname{tg} z = \frac{2^3 z}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots\right) + \frac{2^5 z^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots\right)+\frac{2^7 z^5}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{3^6}+\dots\right)+\dots$
Es bleibt übrig die Reihen in der Klammer zu summiren und dazu bedienen wir uns hier der Integralrechnung, in der Art, wie es Euler gethan hat. Zu diesem Ende erinnern wir uns an eine Reihe, welche wir bei früherer Gelegenheit gefunden haben, nämlich die Reihe: $\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}+\dots$
Man integrire diese Gl so ergibt sich

$$\frac{\pi}{4}x + C = -\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\dots\right)$$

Um die Const. zu bestimmen setze man einmal $x=0$, und $x=\frac{\pi}{2}$ so erfolgt. $C = -\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots\right)$ und: $\frac{\pi^2}{8}+C=0$, daher $C = -\frac{\pi^2}{8}$, und folglich $\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$ und man hat die Gleichung: $\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi^2}{8} = -\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right)$

Man integrire diese Gl nochmals so erfolgt: $\frac{\pi}{8}x^2 - \frac{\pi^2}{8}x + C = -\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\dots\right)$ wobei die Integrations-Constante offenbar $=0$ ist. Man integr. diese Gl nochmals so erhält man

$$\frac{\pi}{24}x^3 - \frac{\pi^2}{16}x^2 + C = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^4}+\frac{\cos 5x}{5^4}+\dots$$

Man setze einmal $x=0$ u. dann $x=\frac{\pi}{2}$, so findet man: $C = 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots$ und dann: $\frac{\pi^4}{192}-\frac{\pi^4}{64}+C=0$, daher $C=\frac{\pi^4}{96}$ und man hat $\frac{\pi^4}{96}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots$ und die Gleichung

$$\frac{\pi}{24}x^3-\frac{\pi^2}{16}x^2+\frac{\pi^4}{96}=\cos x+\frac{\cos 3x}{3^4}+\frac{\cos 5x}{5^4}+\dots$$

Auf diese Weise fahre man fort, so werden sich alle Reihen ergeben, welche wir bedürfen und man wird erhalten:

$$\frac{\pi^6}{960}=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\dots$$

Die Summen $\frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^4}{96}, \frac{\pi^6}{960}\dots$ sind von den Bernoullischen Zahlen abhängig. Man kann nämlich schreiben $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2^2-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{\pi^2}{2}$, $\frac{\pi^4}{96}=\frac{1}{30}\cdot\frac{2^4-1}{4!}\cdot\frac{\pi^4}{2}$, $\frac{\pi^6}{960}=\frac{1}{42}\cdot\frac{2^6-1}{6!}\cdot\frac{\pi^6}{2}$ u. s. w.
Die Brüche $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}\dots$ sind die Bernoullischen Zahlen u. wir haben also die folgende Entwicklg der Tangente

$tg\,x = \frac{1}{6}\cdot\frac{2^2\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot(2^2-1) + \frac{1}{30}\cdot\frac{2^4\cdot 2^3}{4!}(2^4-1) + \frac{1}{42}\cdot\frac{2^6\cdot 2^5}{6!}(2^6-1) + \dots$

Diese Reihe multiplicire man mit $2^{n-1}z$ und integrire hierauf, so erhält man dann das verlangte Integral.

D. Integration der Ausdrücke, welche von Logarithmen abhängen.

Wir heben auch hier nur die einfachsten Fälle hervor, nämlich die folgenden Ausdrücke:

1, $\int x^n\cdot lx\cdot dx$. durch theilw. Integr. erh. m. sogleich

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot lx - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

diese Formel wird unbrauchbar, wenn $n=-1$ ist. Aber alsdann ist das Integral $= \int lx\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(lx)^2 + C$

2°) $\int (lx)^n\cdot\frac{dx}{x} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1} + C$ wird ebenfalls unbrauchbar für $n=-1$; dann aber ist:

$\int\frac{dx}{x\,lx} = l(lx) + C$ (nach der ersten Grundformel)

3°). Man soll, wenn n eine pos. ganze Zahl ist, finden: $\int(lx)^n dx$ durch theilw. Integr. erhält man, wenn $u=(lx)^n$ u. $dv=dx$ gesetzt wird, sogleich die Reductionsformel

$\int(lx)^n dx = x(lx)^n - n\int(lx)^{n-1}dx$.

4°) $\int\frac{dx}{(lx)^n}$. hierfür erhält man, wenn man den Ausdruck schreibt $=\int\frac{dx}{x(lx)^n}\cdot x$ u. $u=x$, $dv=\frac{dx}{x(lx)^n}$ setzt, unmittelbar die Red. form:

$\int\frac{dx}{(lx)^n} = -\frac{x}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{(lx)^{n-1}}$. Wendet man beide Red. formeln wiederholt an, so findet man:

$$\int(lx)^n dx = x(lx)^n\left(1 - \frac{n}{lx} + \frac{n(n-1)}{(lx)^2} - \dots + (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 1}{(lx)^n}\right)$$ und:

$$\int\frac{dx}{(lx)^n} = -x\left(\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} + \dots + \frac{1}{(n-1)\dots 2\cdot 1\,(lx)}\right) + \frac{1}{(n-1)(n-2)\dots 1}\int\frac{dx}{lx} + C$$

Man kann also dieses Integral nur auf das Integr. $\int\frac{dx}{lx}$ reduciren. 5°). Wir wollen schließlich noch die beiden Integrale $\int x^m(lx)^n dx$ u. $\int\frac{x^m dx}{(lx)^n}$ betrachten, unter der Voraussetzung, es sei: n eine ganze posit. Zahl, m dagegen willkürlich. Man erhält eben so leicht die beiden Reductionsformeln:

$$\int x^m(lx)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m(lx)^{n-1}dx$$ und:

$$\int\frac{x^m dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1}\int\frac{x^m dx}{(lx)^{n-1}}.$$

Diese Formeln wiederholt angewandt liefern die folg. sogleich:

$$\int x^m(lx)^n dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left((lx)^n - \frac{n(lx)^{n-1}}{m+1} + \frac{n(n-1)(lx)^{n-2}}{(m+1)^2} - \dots + (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{(m+1)^n}\right)$$

$$\int\frac{x^m dx}{(lx)^n} = -x^{m+1}\left(\frac{1}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{(n-1)(n-2)(lx)^{n-2}} + \dots + \frac{(m+1)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\dots 1\,lx}\right) + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots 1}\int\frac{x^m dx}{lx}$$

Das letzte Integral ist irreducibel, wenn nicht etwa $m=-1$ ist.

für alle andern Werthe v. m führt es auf den Int. Log:
Denn es sei: $x^{m+1}=z$, so ist $x^m dx = \frac{dz}{m+1}$. und: $lx = \frac{1}{m+1}\cdot lz$:
Daher: $\int \frac{x^m dx}{lx} = \int \frac{dz}{lz}$. Es ist sehr leicht nach den obigen Formeln die Differentiale:
$\int x(lx)^2 dx$; $\int \frac{x^2 dx}{(lx)^3}$; $\int \frac{dx}{x^2}\cdot lx$; $\int \frac{dx}{x^0 (lx)^2}$ zu finden.

Das Integral. $\int x^x dx$ läßt sich mit Hülfe der obigen Formeln nun auch entwickeln; denn da $x^x = e^{xlx} = 1 + xlx + \frac{x^2(lx)^2}{1.2} + \dots$ so folgt, wenn man integrirt:
$\int x^x dx = x + \int xlx\cdot dx + \frac{1}{1.2}\int x^2(lx)^2 dx + \dots$ diese Reihe ist jedoch selten brauchbar. — Wir beschließen hiermit das Thema über die Integration gegebener Functionen u. wenden uns zur näheren Untersuchung des Integrals selbst, und dann zur Anwendg der Integral-Rechnung.

Ueber die Constante der Integration.

Die Existenz und Nothwendigkeit einer völlig willkürlichen, v. x unabhängigen Größe, welche dem Integral beigefügt wird, wurde früher schon nachgewiesen. Sie bleibt in dieser Willkürlichkeit, solange neben der Gleichung
$\frac{d.F(x)}{dx} = f(x)$ nicht noch andere Bedingungen bestehen. In den Anwendungen aber sind solche Bedingungen gegeben und darnach muß man über die Constante, welche in der Gl.
$\int f(x).dx = F(x) + C$, vorkommt, seine Verfügung treffen. Man kann hierbei zwei Fälle unterscheiden; einmal, daß für das Integral zwei verschiedene Darstellungen gefunden sind. Dieser Fall kam mehrere Male vor in dem Vorhergehenden; Wir nennen hierbei an einige Beispiele. So gab die Gl: $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, die eine Darstellg
$F_1(x) = \operatorname{arctg} x + C_1$, und dann wegen der Gl:
$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{x+\sqrt{-1}}\right)$ eine zweite Darstellg
$F_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} + C_2$, so daß, wenn man $C_2 - C_1 = C$ setzt, die Gl. erfolgt: $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l\frac{x-\sqrt{-1}}{x+\sqrt{-1}} + C$
Um die Const. zu suchen, kann man irgend einen Werth x_0 für x setzen und braucht dann nur die Glgn voneinander abzuziehen, so ist die Constante auch eliminirt. Wir setzten früher $x_0 = 0$ und erhielten $\pm K\pi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l(-1) + C$

$\operatorname{arctg} x \pm K\pi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot l\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x}$. Ähnliches kam vor bei den Reihen-Entwickl. Desgl. fanden wir aus der Gl. $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{a+x}$ einmal:

$F_1(x) = l(a+x) + C_1$, und dann, mit Rücksicht auf die Reihe
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \dots$, die andere Darstellung
$F_2(x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots + C_2$ Und, wenn man nun $C_2 - C_1 = C$ setzt, erhält man die Gleichung: $l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots + C$. Setzt man für x_0 den Werth 0, so ergibt sich: $C = la$.
Auf gleiche Weise würde verfahren, bei der Integration der Gleichung $\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$ Der Werth x_0 ist völlig willkürlich; man hat bei seiner Wahl nur darauf zu sehen, daß man einfachere Ausdrücke, vor allem daß keine mehrdeutige Formen durch seine Einsetzung entstehen. Der angegebene Fall kommt nur bei einer analytischen Anwendungen vor.

2. Meistens kann man nur eine Darstellung des Integrals erhalten, und ist durch die Aufgabe, welche auf dieselbe geführt hat ein particulärer Werth v. x – wir wollen ihn x_0 bezeichnen – gegeben, und wird verlangt, man soll in der Gleichung: $\int f(x)dx = F(x) + C$ die Constante gleich dem negativ genommenen Werthe $F(x)$ für $x = x_0$, oder als Const $= -F(x_0)$ setzen, so daß also $\int f(x)dx = F(x) - F(x_0)$ nicht mehr der allgemeinste Ausdruck des Integrals ist, oder mit andern Worten, daß das Integral für $x = x_0$ verschwinden soll. Außerdem ist fast immer noch ein zweiter Werth gegeben, bis zu welchem die Willkürlichkeit auch von x gehoben wird. Es sei dieser $= x_1$, so daß man statt dem allgem. Werth $F(x) + C$ nur haben will $F(x_1) - F(x_0)$, welcher Ausdruck aus dem ersteren erhalten wird, wenn man den Anfangswerth x_0 und den Endwerth x_1 in die Function einsetzt und die Resultate von einander abzieht. Dieser Ausdruck wird im Gegensatze zu dem ersteren, welcher eine unbestimmte Constante enthält, das „bestimmte Integral" und jener das „unbest. Integral v. $f(x)$" genannt. Der Werth x_0 heißt die untere, jener x_1 die obere Grenze des Integrals.
Unbest. Integrale sind alle bisher abgeleiteten; es ist aber leicht zu sehen, wie man aus dem unbestimmten Integral wenn die Grenzen gegeben sind, das bestimmte ableiten kann. Um kurz u. bündig anzudeuten, von welcher Function und zwischen welchen untern u. obern Grenzen man das best. Integral zu nehmen habe, hat der franz. Mathematiker Fourier die jetzt allgem. übliche Bezeichnung vorgeschlagen, wonach man die untere Grenze an das untere und die obere an das obere Ende des Integralzeichens setzt, so daß man das unbestimmte Integral.
$\int f(x)dx = Fx + C$ ist, dies zwischen den Grenzen x_0 x_1

genommen, hat also erhält:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Die folgenden Beispiele dienen zur Erläuterung des Uebergangs vom unbestimmten zum bestimmten Integral

1) Man soll das Integral der Function x^n zwischen den Grenzen x_0 u. x_1 nehmen. Das unbestimmte Integral ist $= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Um das bestimmte zu erhalten, bildet man die Differenz der Ausdrücke $\frac{x_1^{n+1}}{n+1} + C$, u. $\frac{x_0^{n+1}}{n+1} + C$, so erhält man: $\int_{x_0}^{x_1} x^n\,dx = \frac{x_1^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1}$

2) Zwischen denselben Grenzen soll die Function $\frac{1}{x+h}$ integrirt werden. Das unbestimmte Integral ist $= l(x+h) + C$, daher:

$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x+h} = l\,\frac{x_1+h}{x_0+h}$. 3° Man soll zwischen denselben Grenzen den Ausdruck $\frac{1}{x^2+a^2}$ integriren. Das unbestimmte Integral ist $= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ folglich: $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x_0}{a}\right)$

4° Man soll $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ finden. Das unbest. Integr. ist: $l(x+1) + C$, daher: $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = l2$

5) Man soll $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$ finden. Nach dem obigen 3. erhält man $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

6.) Ebenso findet man . . . . $\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi$

7. $\int_{-a}^{+a} \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0$, 8, $\int_{-a}^{+a} \cos x\,dx = 2\sin a$ und 9, $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$

10, $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$, 11, Man soll $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ finden.

Das unbestimmte Integral ist $= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} l(1+x^2) + C$ folglich, die Grenzen eingesetzt, erhält man: $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} l2$

Nicht selten ist eine der Grenzen unendlich gross. Es macht dies keine Schwierigkeit, wenn nicht etwa eine unbestimmte Form, oder ein mehrdeutiger Ausdruck durch das Einsetzen solcher Grenzen aus dem unbestimmten Integrale entstehen. Wie hierbei zu verfahren, zeigen folgende Beispiele

1, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 2, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x} = \infty$, 3, $\int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{a}}\,dx$. das unbest. Integr. ist: $= -\frac{1}{\sqrt{a}} e^{-x\sqrt{a}} + C$, folglich, wenn man die Grenzen einsetzt:

$$\int_0^{\infty} e^{-x\sqrt{a}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

4, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x\,dx = \frac{1}{2}$, (das unbest. Integr. $= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$)

5. $\int_0^{\infty} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} = \frac{\pi}{4}$, (das unbest. J. $= \operatorname{arctg} e^x + C$)

Häufig sind selbst beide Grenzen unendlich gross nämlich $-\infty$ und $+\infty$. Einige Beispiele mögen hier zum Verständniss dienen.

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, 2°) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = 0$, 3°) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x\,dx = 0$,

4) Wir erhielten früher die Formeln:

$$\int e^{-kx}\cdot\cos\alpha x\cdot dx = \frac{e^{-kx}(\alpha\sin\alpha x - k\cdot\cos\alpha x)}{k^2+\alpha^2} + C \text{ und}$$

$$\int e^{-kx}\cdot\sin\alpha x\cdot dx = -\frac{e^{-kx}(k\sin\alpha x+\alpha\cos\alpha x)}{k^2+\alpha^2}+C$$

Es sei darin k eine wesentlich positive Größe. Man soll diese Integrale zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ nehmen. — Für die obere Grenze werden, weil k an sich positiv, beide Ausdrücke rechter Hand $=0$, sodaß man die 2 sehr nützl. Formeln hat:

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cdot\cos\alpha x\cdot dx = \frac{k}{k^2+\alpha^2} \text{ u. } \int_0^\infty e^{-kx}\cdot\sin\alpha x\, dx = \frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}$$

5) Man soll folgendes bestimmte Integral finden: $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\theta+x^2}$. Nach der Formel:

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+2bx+c}\cdot dx = \frac{m}{2a}\, l(ax^2+2bx+c) + \frac{an-bm}{a\sqrt{ac-b^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}+C$$

welche für $b^2-ac<0\ (=-\sin^2\theta)$ gilt, und worin $m=0$, $n=1$, $a=1$, $b=\cos\theta$, $c=1$ zu setzen ist, erhält man für das unbestimmte Integral

$=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\theta}{\sin\theta}+C$, und, wenn man die Grenzen einsetzt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\theta+x^2} = \frac{\pi}{2\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\theta) = \frac{\pi}{2\sin\theta}-\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\sin\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta}$$

6) Man soll $\int_0^\infty x^n\cdot e^{-kx}\cdot dx$ finden, worin k wieder eine wesentl. positive Größe sein soll. Für das unbest. Int. erhält man

$$= -\frac{e^{-kx}}{k}\left(x^n + \frac{n}{k}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{k^2}x^{n-2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots2.1}{k^n}\right)+C$$

Für die obere Grenze geht die rechte Seite der Gleichg in eine Summe v. Gliedern über, welche wesentlich v. der Form $x^m\cdot e^{-kx} = \frac{x^m}{e^{kx}}$ sind, wobei m nur die Zahlen $n, n-1, n-2, \dots$ repräsentiren soll. Für $x=\infty$ geht dieser Bruch in die unbest. Form $\frac{\infty}{\infty}$ über, deren wahren Werth man bekanntlich erhält, wenn man den Zähler u. den Nenner jeden für sich, so oft differenzirt, bis der Bruch für denjenigen Werth v. x, aus welchem die unbestimmte Form hervorgegangen ist, einen bestimmten Werth erhält.

Man differenzirt den Bruch $\frac{x^m}{e^{kx}}$ auf angegebene Weise m mal hinter einander, so erhält man: $\frac{m(m-1)(m-2)\dots2.1}{k^m e^{kx}}$, welcher Bruch für $x=\infty$ in 0 übergeht. Das Integral ist $=0$, und wird also für die obere Grenze und für die untern $=-\frac{n(n-1)\dots2.1}{k^{n+1}}$, so daß man hat $\int_0^\infty x^n\cdot e^{-kx}\cdot dx = \frac{1.2.3\dots(n-1)n}{k^{n+1}}$

7) Man soll finden $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\operatorname{arctg}x}\cdot dx}{1+x^2}$. Das unbest. Int. ist $=e^{\operatorname{arctg}x}+C$, folglich, wenn man die Grenzen einsetzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} \cdot dx}{1+x^2} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}};$$

8) Man soll $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\operatorname{tg} x} \cdot dx}{\cos x^2}$ finden. Unbest. Int. $= -e^{-\operatorname{tg} x} + C$. Für die obere Grenze hat man 0 und für die untere -1, daher $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\operatorname{tg} x} \cdot dx}{\cos x^2} = 1$

9. Man soll das Int. $\int \sin x^m \cdot dx$ zwischen den Grenzen 0 u. π für m gerade u. für m ungerade nehmen.

a. für <u>m gerade</u> erhält man als unb. Integral:

$$-\frac{\cos x}{m}\left(\sin x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}\sin x^{m-3} + \dots + \frac{1.3.5\dots(m-3)(m-1)}{2.4\dots(m-4)(m-2)}\cdot \sin x\right) + \frac{1.3.5\dots(m-1)}{2.4\dots(m-2).m}\cdot x + C.$$

Daher, wenn man die Grenzen einsetzt:

$$\int_0^{\pi} \sin x^m \cdot dx = \frac{1.3.5\dots(m-1)}{2.4.6\dots(m-2).m}\cdot \pi.$$

Auf ähnliche Weise findet man, b für <u>m ungerade</u> $\int_0^{\pi} \sin x^m \cdot dx = \frac{2.4.6\dots(m-3)(m-1)}{1.3.5\dots(m-4)(m-2).m}$

Bevor wir in die nähere Untersuchung der best. Int. eintreten ist es zweckmäßig <u>einige allg. Sätze ü. die best. Integr.</u> voranzuschicken u. zwar aus der obigen Definition abzuleiten. Diese Definition des bestimmten Integrals liegt nur darin, daß, wenn $\int f(x).dx = F(x) + C$ das unbest. das zwischen den Grenzen x_0 u. x_1 genommene, best. Integr.

$\int_{x_0}^{x_1} f(x).dx = F(x_1) - F(x_0)$ sei. Hieraus ergeben sich ganz leicht die folgenden Grundeigenschaften des best. Integrals.

1. Man kann ein best. Int. in zwei andere zerlegen, wovon eins die nämliche untere Grenze, das andere die nämliche obere Grenze; aber eine <u>beliebige</u> Größe ~~hat~~ das erste zur ob. u. das letzte zur unteren Grenze hat. Es sei nämlich ξ eine zwischen x_0 u. x_1 liegende Größe, so kann man setzen: $\int_{x_0}^{x_1} f(x).dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x).dx + \int_{\xi}^{x_1} f(x).dx$

Ist $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, so hat man $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$ dann:

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx = F(\xi) - F(x_0) \text{ u. } \int_{\xi}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(\xi)$$

Addirt man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man, wie es sein soll, wieder: $F(x_1) - F(x_0)$

z.B. $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Man kann die beiden Grenzen mit einander vertauschen muß aber dann das Integralzeichen negativ nehmen,

Denn es ist: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx = F(x_1) - F(x_0) = -(F(x_0) - F(x_1)) = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx$

3. Das bestimmte Integral einer Summe v. Funktionen ist gleich der Summe der bestimmten Integrale jeder einzelnen Funktion. d.h. man hat:

$$\int_{x_0}^{x_1}(\varphi(x)+\psi(x))\cdot dx = \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\cdot dx + \int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\cdot dx$$

4. Wenn man ein bestimmtes Integral nach seiner obern Grenze differenziert, von welcher die untere Grenze, sowie auch, die Funktion unter dem Integralzeichen nicht abhängt, so ist der Differentialquotient gleich der Funktion unter dem Integralzeichen, wenn man darin für die Veränderl. die obere Grenze einsetzt. d.h. es ist unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\frac{d\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx}{dx_1} = f(x_1)\text{; denn es ist sei: }\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Man lasse x_1 um eine sehr kleine Grösse Δx_1 zunehmen, so wird die linke Seite dieser Gleichung übergehen in $\int_{x_0}^{x_1+\Delta x_1} f(x)\,dx$, und nach dem 1. Satze ist dies:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x)\,dx$$

, wobei das letztere Integral die durch die Zunahme Δx_1 entstandene Aenderung des Integrals ist. die rechte Seite der Gleichung aber ist: $= F(x_1+\Delta x_1) - F(x_0)$. So ist also die Aenderung des Integrals

$$= \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x)\cdot dx = F(x_1+\Delta x_1) - F(x_1)$$

Diese Aenderung dividire man durch seine Δx_1, so erfolgt $\frac{F(x_1+\Delta x_1)-F(x_1)}{\Delta x_1}$, und lasse nun Δx_1 ins unendliche abnehmen, so nähert sich dieser Bruch dem gesuchten Differentialquotienten und wird dieser also $= F'(x_1) = f(x_1)$, womit der Satz bewiesen ist.

5. Wenn man ein bestimmtes Integral nach seiner untern Grenze differenziert, so ist der Differenzialquotient unter den gemachten Voraussetzungen gleich dem negativ genommenen Funktion unter dem Integralzeichen, wenn man darin für die Variable die untern Grenze setzt. d.h. es ist:

$$\frac{d\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx}{dx_0} = -f(x_0)$$

Man lasse x_0 um Δx_0 wachsen so erhält man:

$$\int_{x_0+\Delta x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx = F(x_1) - F(x_0+\Delta x_0)\text{, oder:}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_0+\Delta x_0} f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0+\Delta x_0)$$

Und um die Aenderung zu erhalten, hat man:

$$-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x)\,dx = -F(x_0+\Delta x_0) + F(x_0) = -(F(x_0+\Delta x_0) - F(x_0))$$

Und, wenn man diese Aenderung durch seine Δx_0

dividirt und dann Δx unendlich klein werden läßt, so erhält man als Differential-Quotienten: $= -F(x_0) = -f(x_0)$

6, Wenn die Function unter dem Integralzeichen eine Größe y enthält, welche von x ganz unabhängig ist u. mit welcher auch die Grenzen des Integrals gar nicht zusammenhängen, so kann man das bestimmte Integral dadurch nach y differenziren, daß man die Function unter dem Integralzeichen nach y differenzirt, d.h. es ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$\frac{d\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx}{dy} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{df(x,y)}{dy}$$

Dieser Satz läßt sich leicht, wie folgt beweisen. Man lasse y um Δy wachsen so geht das Integral über in $\int_{x_0}^{x_1} f(x,y+\Delta y)\,dx$. Es ändert sich also um $\int_{x_0}^{x_1} f(x,y+\Delta y)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx$, welches nach dem 1. Satz gleich ist:

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\right) dx$$

Man dividire diese Änderung durch Δy, was weil Δy nach x constant ist, unter dem Integral-Zeichen geschehen kann; es ergibt sich als Quotient:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\, dx$$

Man lasse nun Δy in infinitum abnehmen, so nähert sich der Bruch unter dem Integralzeichen dem Differentialquotienten $\frac{df(x,y)}{dy}$, womit der Satz bewiesen ist. Dieser wichtige Satz wurde zuerst von Leibnitz gefunden und er hat ihn die „differentiatio de curva in curvam" genannt. Durch ihn lassen sich aus einem bestimmten Integrale oft viele neue ableiten.

Z.B. Es ist $\int dx\, l(xy+1) = x\, l(xy+1) - \int \frac{xy}{xy+1}\, dx = x\, l(xy+1) - x + \int \frac{dx}{xy+1}$

$$= x(l(xy+1)-1) + \frac{1}{y} l(xy+1) = \frac{xy+1}{y} l(xy+1) - x + C$$

Nimmt man dieses Integral zwischen den Grenzen 0 u. 1, so erh. man $\int_0^1 dx \cdot l(xy+1) = \frac{y+1}{y} l(y+1) - 1$ und wenn man nach y differenzirt, so erfolgt hieraus $\int_0^1 \frac{x\,dx}{xy+1} = \frac{1}{y+1}$.

Man habe ferner: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha}$. Das unbestimmte Integral ist $= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + C$, und, wenn man die Grenzen einsetzt so

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$$

; differenzirt man beiderseits nach α, so hat man:

$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha)^2} = \frac{1}{2^2\alpha\sqrt{\alpha}} \cdot \pi$; abermals differenzirt erhält man:

$\int_0^\infty \frac{2\cdot dx}{(x^2+\alpha)^3} = \frac{1.3}{2^3\alpha^2\sqrt{\alpha}}\cdot\pi$; u. s. w. Differenzirt man n mal hinter einander so ergibt sich

$\int_0^\infty \frac{1.2.3\cdots n\cdot dx}{(x^2+\alpha)^{n+1}} = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}\alpha^n\sqrt{\alpha}}\cdot\pi$; oder, setzt man $\alpha = a^2$, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+1}a^{2n+1}}\cdot\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{1.2.3\cdots n} = \frac{\pi}{2a^{2n+1}}\cdot\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n}$$

Bekanntlich ist $\int e^{-\alpha x}\cdot dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + C$. Es sei α eine wesentlich positive Grösse so ist $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cdot dx = \frac{1}{\alpha}$; differenzirt man nun n mal nach α, so erfolgt:

$\int_0^\infty x^n\cdot e^{-\alpha x}\cdot dx = \frac{1.2.3\cdots n}{\alpha^{n+1}}$. Auch auf unbestimmte Integrale lässt sich die Methode der Differenzation unter dem Integralzeichen nach einer neuen Veränderlichen anwenden; denn der für bestimmte Integrale gegebene Beweis lässt sich auf unbestimmte Wort für Wort übertragen. Auf unbestimmte Integrale angewendet bietet sie ein reiches Aufbauen von neuen Integralen aus schon gefundenen und erhielt deshalb den Namen „Integration durch Differentiation“. Hier zu Lande scheint sie nur selten angeführt worden zu sein. 1. Für jedes beliebige μ hat man $\int \sin x^\mu \cos x\, dx = \frac{\sin x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$, differenzirt man diese Gleichung nach μ so erfolgt:

$$\int \sin x^\mu \cos x\cdot l\sin x\, dx = \frac{(\mu+1)\sin x^{\mu+1}\, l\sin x - \sin x^{\mu+1}}{(\mu+1)^2}$$
$$= \frac{\sin x^{\mu+1}}{(\mu+1)^2}\left((\mu+1)\, l\sin x - 1\right) + C$$

2. Bekanntlich ist: $\int (ax^n+b)^\mu\cdot x^{n-1}\cdot dx = \frac{(ax^n+b)^{\mu+1}}{an(\mu+1)} + C$. Differenzirt man diese Gleichung, so ergibt sich die neue Integralformel:

$$\int (ax^n+b)^\mu x^{n-1}\cdot l(ax^n+b)\cdot dx = \frac{an(\mu+1)(ax^n+b)^{\mu+1}\cdot l(ax^n+b)}{a^2n^2(\mu+1)^2} - \frac{an(ax^n+b)^{\mu+1}}{a^2n^2(\mu+1)^2}$$
$$= \frac{(ax^n+b)^{\mu+1}\left((\mu+1)\, l(ax^n+b)-1\right)}{an(\mu+1)^2} + C$$

3. Für jedes beliebige n ist: $\int (\operatorname{arctg} x)^n \frac{dx}{1+x^2} = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{n+1} + C$. Differenzirt man die ganze Gleichung nach n, so erfolgt:

$$\int (\operatorname{arctg} x)^n\, l(\operatorname{arctg} x)\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{(n+1)(\operatorname{arctg} x)^{n+1}\cdot l(\operatorname{arctg} x) - (\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{(\operatorname{arctg} x)^{n+1}}{(n+1)^2}\left((n+1)\, l(\operatorname{arctg} x) - 1\right) + C$$

Häufig lassen sich durch diese Methode Integrale durch Differential-Quotienten höherer Ordnung und vice versa darstellen. Für jedes beliebige μ ist

$\int x^\mu lx\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\left(lx - \frac{1}{\mu+1}\right) + C$ differenzirt man diese Gl. n-1 mal nach μ so erfolgt

$$\int x^\mu (lx)^n\cdot dx = \frac{d^{(n-1)}\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\left(lx - \frac{1}{\mu+1}\right)\right)}{d\mu^{n-1}}$$

1. Man kann in einem best. Integrale behufs seiner Transformation eine neue Veränderliche einführen, welche mit der andern in irgend einer gewählten Beziehung steht, nur muß man dann die Grenzen des transformirten Integrals so einrichten, daß sie den alten jener Beziehung gemäß entsprechen. Es sei $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ das zu transformirende Integral;

Man will darin eine Neu-Veränderl. z einführen, welche mit der alten x in der Beziehung steht, daß $x=\varphi(z)$, so ist $dx=\varphi'(z)dz$, ~~wo z u x~~. Setzt man nun überall statt x, $\varphi(z)$, also wo x_0 u x, wo Konst. die aus den beiden Gleichungen $x_0=\varphi(z_0)$ u $x_1=\varphi(z_1)$ sich ergebenden Werthe von z_0 u z_1, so hat man:

$$1,\quad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\int_{z_0}^{z_1} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

Es sei zB. $\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x}lx$ gegeben; man habe dabei $x=\varphi(z)=e^z$, so ist $dx=e^z dz$ und $\int lx\cdot\frac{dx}{x}=\int z dz=\frac{z^2}{2}+Const.$ ferner ist $z_0=x_0$ u $z_1=x_1$ daher:

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,dz=\frac{1}{2}(lx_1)^2-\frac{1}{2}(lx_0)^2$$

2. Man habe $\int_{x_0}^{x_1} l\sin x\,dx$; man setze hierin $x=\arcsin z$, so ist $z=\sin x$ und $dx=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ folglich erhält man:

$$\int_{x_0}^{x_1} l\sin x.dx=\int_{z_0}^{z_1}\frac{lz}{\sqrt{1-z^2}}.dz=\int_{\sin x_0}^{\sin x_1}\frac{lz}{\sqrt{1-z^2}}.dz$$

Es sei zB hierin $x_0=0$, u $x_1=\frac{\pi}{2}$, so ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx=\int_0^1\frac{lz}{\sqrt{1-z^2}}.dz$$

3. Man wünscht dem Integral $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}} x^m(-ax^n+b)^p.dx$ die Grenzen 0 u 1 und in einer andern Darstellg die Grenzen 0 u. ∞ zu geben.

Man setze $x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}z^{\frac{1}{n}}$, so ist $dx=\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot z^{\frac{1}{n}-1}\cdot dz$ und da $x_0=0$ folglich $z_0=0$; $x_1=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, also $z_1=1$ ist, so geht das Integral über in $\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\cdot b^p\int_0^1 z^{\frac{m+1}{n}-1}(1-z)^p dz$. Setzt man hierin $z=\frac{t}{t+1}$, so ist $dz=\frac{dt}{(t+1)^2}$ und da $z_0=0$ u $z_1=1$, so ist $t_0=0$, u $t_1=\infty$; daher hat man nun

$$\int_0^{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}} x^m(-ax^n+b)^p.dx=\frac{b^p}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^\infty\frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}.dt}{(t+1)^{\frac{m+1}{n}+p+1}}$$

Nach Einsetzung der Grenzen erscheint der Integrations-Buchstabe nicht mehr im Resultat weshalb es ganz gleichgültig ist, welches Buchstaben man sich bedient, wenn er nur nicht mit den Constanten verwechselt werden kann u deshalb ist es nicht nöthig bei der Transformation eines best. Int. jedesmal einen neuen Int.-Buchstaben zu wählen. Nachdem die Grenzen bestimmt, kann man wieder den alten Buchstaben gebrauchen, also z.B. in dem obigen Integr. statt t, x setzen.

Grundeigenschaft des bestimmten Integrals.

Bisher erscheint uns das best. Integral als auf fast ganz willkührliche Weise aus dem unbestimmten Integral construirt zu sein, indem wir es aus der Differenz zweier Werthe des unbestimmten Integrals bestehen ließen. Diese Definition ist recht hinreichend um von dem unbest. zu dem definirten best. Integr. überzugehen, aber sie gibt uns keine deutliche Einsicht in die innere Zusammensetzung des best. Integrals um so mehr, als wir auch vom unbestimmten nichts anderes wissen, als dass es differenzirt, die Function unter dem Integralzeichen wieder geben muss. Wir versuchen daher zu dieser Aufklärung durch den Taylorschen Satz zu gelangen, welcher ja eine Relation zwischen der Function und ihrem ersten, freilich aber auch mit ihren höheren Differentialquotienten in einer sehr leicht [illegible] lassen, wird die folgende Betrachtung zeigen.

Man theile die Differenz der Grenzen in n Theile, wo n eine schon ziemlich große Zahl sein soll, und setze $\frac{x_1-x_0}{n}=h$. Entwickelt man nun

$$F(x_0+h),\ F(x_0+2h),\ F(x_0+3h),\ \dots\ F(x_0+nh)$$

nach der Taylorschen Reihe, so erhält man, wenn $dF(x)=F'(x)=f(x)$, nacheinander die folgenden Gleichungen:

$$F(x_0+h)=F(x_0)+\frac{h}{1}F'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}F''(x_0)+\dots$$
$$F(x_0+2h)=F(x_0+h)+\frac{h}{1}F'(x_0+h)+\frac{h^2}{1.2}F''(x_0+h)+\dots$$
$$F(x_0+3h)=F(x_0+2h)+\frac{h}{1}F'(x_0+2h)+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F(x_0+(n-1)h)=F(x_0+(n-2)h)+\frac{h}{1}F'(x_0+(n-2)h)+\dots$$
$$F(x_0+nh)=F(x_0+(n-1)h)+\frac{h}{1}F'(x_0+(n-1)h)+\dots$$

Addirt man alle diese Gl., so bleibt nur der Anfangswerth und der Endwerth, nämlich $F(x_1)$ u. $F(x_0)$ stehen und man erhält:

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(x_0) = {} & h\left(f(x_0)+f(x_0+h)+f(x_0+2h)+\dots f(x_0+(n-1)h)\right)\\ & +\frac{h^2}{1.2}\left(f'(x_0)+f'(x_0+h)+f'(x_0+2h)+\dots f'(x_0+(n-1)h)\right)\\ & +\frac{h^3}{1.3}\left(f''(x_0)+f''(x_0+h)+\dots f''(x_0+(n-1)h)\right)+\dots\end{aligned}$$

Da nun nach der bisherigen Definition des best. Integrals $F(x_1)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}f(x).dx$ ist, so ist folglich $\int_{x_0}^{x_1}f(x).dx$ der obigen Reihe gleich.

Diese Reihe ist sehr weitläufig u scheint keineswegs eine einfache Darstellung des bestimmten Integrals zu geben. Einmal, weil sie im allgemeinen ins Unendliche geht u dann weil sie die Werthe der höheren Differenzialquot: nebst jenen der function $f(x)$ enthält. Bemerkt man aber, dass wir jetzt die Grösse h noch völlig in unserer Gewalt haben, so kann es nicht entgehen, dass diese den Process der unendlichen Verkleinerung unterworfen es zu Wege bringt, dass sich die Reihe wenigstens in dem Fall auf ihr erstes Glied reducirt, wenn die Werthe der Differenzialquotienten aller Ordnungen, endliche Grössen sind: denn setzen wir es sei zB: $f'(x_0+\lambda\cdot h)$ der grösste aller Werthe des ersten Differentialquotienten, so wird die 2te Reihe unserer Gl kleiner sein als $\frac{h^2}{1\cdot 2}\cdot n f'(x_0+\lambda\cdot h)$. Aber auch dieser grösste Werth verschwindet für ein unendlich klein werdendes h, weil nämlich $n\cdot h = x_1 - x_0$, so ist dieser Ausdruck $= \frac{x_1-x_0}{2}\cdot h\cdot f'(x_0+\lambda\cdot h)$, welcher sich offenbar der Grenze 0 nähert mit h. Ähnlich lässt sich bei der 3te u 4te etc Reihe verfahren, u sich nachweisen, dass jede derselben mit h sich der 0 nähert. – Unter den gemachten Voraussetzungen würde sich also das bestimmte Integral durch die Grenze eines Produktes darstellen lassen, nämlich durch:

$$\lim_{h=0} h\left(f(x_0)+f(x_0+h)+\ldots\ldots f(x_0+(n-1)h)\right)$$

Die Bedingung, dass alle Differentialquotienten endliche Werthe behalten sollen macht jedoch diesen Satz zu beschränkt, und es ist nicht klar, ob diese Bedingung unumgänglich nothwendig ist; ferner ist es unklar, wie das Produkt für $h=0$ werdend, und bei unendlicher Anhäufung v. Gliedern in der Form sich sich einer endlichen Grenze nähern könne, u. welcher diese Grenze sei. Immerhin hat uns diese oberflächliche Betrachtung auf dieses Produkt aufmerksam gemacht Wir wollen deshalb den ganz entgegengesetzten Weg zum vorigen einschlagen und nicht mehr von dem bestimmten Integral, sondern von dem genannten Produkt ausgehen und nachweisen:

1° dass wenn man das Intervall zweier Grössen x_0 u x_1 in eine grosse Anzahl n beliebiger Theile theilt, wenn man die Werthe einer innerhalb dieses Intervalls endlich u stetig bleibenden function $f(x)$ für die genannten Theile berechnet u. jeden dieser functionswerthe mit dem ihm vorhergehenden Intervall multipl. Die Summe dieser ~~Werthe~~ Producte sich einer endlichen u. bestimmten Grenze um so mehr nähert als die Theile sehr klein sind, in welche man das Intervall $x_1 - x_0$ getheilt hat.

2°) Daß dieser Grenzwerth nichts anderes ist, als das bisher definirte zwischen den Grenzen x_0 u. x_1 genommene bestimmte Integral v. $f(x)$

a. Um den ersten Theil unseres Satzes zu beweisen wollen wir annehmen, es seien die in das Intervall x_0 bis x_1 eingeschalteten Größen der Reihe nach die folgenden $x_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_{r-1}, \xi_r, \dots x_1$

und wir haben nun zu beweisen, daß die Summe

I. $(\xi_1 - x_0) f(x_0) + (\xi_2 - \xi_1) f(\xi_1) + (\xi_3 - \xi_2) f \xi_2 + \dots + (\xi_r - \xi_{r-1}) f(\xi_{r-1}) + \dots + (x_1 - \xi_{n-1})$

sich einer endlichen Grenze in Infinitum nähert wenn man die Intervalle

$\xi_1 - x_0, \; \xi_2 - \xi_1, \dots\dots \; x_1 - \xi_{n-1}$ sich der 0 nähern läßt.

Nehmen wir an, es sei die Theilung des Intervalls schon weit getrieben, resp. n schon so groß, daß die größte Differenz zweier aufeinander folgender Functionswerthe kl. sei, als ein beliebig kleine Größe δ, welche Annahme offenbar gestattet ist.

Es sei $f(\xi_{r-1})$ u. $f(\xi_r)$ die beiden Functionswerthe deren Differenz am größten ist und für welche also $f(\xi_r) - f(\xi_{r-1}) < \delta$ ist

Unser Satz wird nun erwiesen sein, wenn wir zeigen daß, wie sehr man auch die Theilung vergrößern mag, wie viele neue Intervalle man auch bildet und wie viele neue Producte man also in die Summe einschließt, die Summe sich dadurch doch nur um eine Größe ändert, die mit δ verschwindet. Um das zu zeigen, theile man das Intervall: ξ_{r-1} bis ξ_r in p neue Intervalle d.h. Man interpolire die neuen Größen $\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_{p-1}$, u. berechne für jede derselben die Functionswerthe und bilde die Summe

$$(\zeta_1 - \xi_{r-1}) f(\xi_{r-1}) + (\zeta_2 - \zeta_1) f(\zeta_1) + (\zeta_3 - \zeta_2) f(\zeta_2) + \dots (\xi_r - \zeta_{p-1}) f(\zeta_{p-1})$$

Diese Summe tritt an die Stelle des einen Gliedes $(\xi_r - \xi_{r-1}) f(\xi_{r-1})$: bevor wir sie jedoch einsetzen, wollen wir d

Produkte: $\zeta_2 f(\xi_{r-1}), \zeta_3 f(\xi_{r-1}), \ldots \xi_{r-1} f(\xi_{r-1})$ addiren und wieder subtrahiren dann wird sich die Summe, wenn man das ursprüngliche Glied $(\xi_r-\xi_{r-1})f(\xi_{r-1})$ abzieht, auf folgende Art schreiben

$$(\xi_2-\xi_1)(f(\xi_1)-f(\xi_{r-1})) + (\xi_3-\xi_2)(f(\xi_2)-f(\xi_{r-1})) + \cdots + (\xi_r-\xi_{r-1})(f(\xi_{r-1})-f(\xi_{r-1}))$$

Die Differenzen der Functionswerthe, welche hierin vorkommen, sind noch in stärkerem Maße $< \delta$, weil sich jene Werthe näher liegen als die beiden äußersten: $f(\xi_{r-1})$ und $f(\xi_r)$. Setzt man also für jene Differenzen δ, so vergrößert man die Summe, welche also kleiner ist, als

$$\delta(\xi_2-\xi_1+\xi_3-\xi_2+\cdots+\xi_r-\xi_{r-1}) = \delta(\xi_r-\xi_1)$$

Setzt man hierin ξ_{r-1} für ξ_1, so vergrößert man abermals dieses Glied und man hat: $\delta(\xi_r-\xi_{r-1})$ für die Summe der Glieder im neuen Intervall und dies ist die größte Summe die vorkommen kann. Verfährt man auf gleiche Art bei den andern Intervallen, so wird die Summe der neu hinzukommenden Glieder kleiner sein, als: $\sum\delta(\xi_r-\xi_{r-1}) = \delta\sum(\xi_r-\xi_{r-1})$ od. also $< \delta(x_1-x_0)$

Da δ eine beliebig kleine Größe ist, so wird auch die Summe der neu hinzukommenden Produkte kleiner werden, als jede gegebene, noch so kleine Größe, und es ist nun bewiesen daß, wie groß man auch n werden läßt sich die Summe (I) zuletzt nur um beliebig wenig ändert, was zur Folge hat, daß sie sich einer endlichen und bestimmten Grenze nähert.

Diesen endlichen, best. Grenzwerth nennen wir nun das bestimmte Integral der Function $f(x)$ genommen zwischen den Grenzen x_0 u. x_1 und bezeichnen es durch $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$.

6. Um nun zu zeigen, daß das so definirte bestimmte Int. mit dem früher charakterisirten einerlei ist, wollen wir die Summe (I) um ein Glied wachsen lassen, wodurch sie sich ändert um $(\xi_{n+1}-\xi_n)f(\xi_n)$, während sich die Variable um $\xi_n-\xi_{n-1}$ geändert hat, woraus folgt daß man ξ_{n+1} so bestimmen daß der Bruch

$$\frac{\xi_{n+1}-\xi_n}{\xi_n-\xi_{n-1}} = 1$$

werde, was offenbar geschehen kann.

der Quotient dieser beiden Änderungen muß:
$f(\xi_n) = f(x_1)$; d.h. der Differentialquotient von jener Summe, oder unseres bestimmten Integrals

Man hat also

$$\frac{d\int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx}{dx_1} = f(x_1)$$

Bezeichnet man der Kürze wegen mit u das best. Int. so ist $\frac{du}{dx_1} = f(x_1)$. Soll hieraus u gefunden werden, so muß der Ausdruck hierfür (wozu: $F(x_1) + C$) die Eigenschaft haben, daß er nach x_1 differenzirt $f(x_1)$ gibt; dann hat man $u = F(x_1) + C$. Es gibt nun immer wenigstens einen Fall für welchen man ein bestimmtes Integral angeben kann, nämlich den, wo $x_1 = x_0$ ist. Man hat alsdann die Gl.

$$0 = F(x_0) + C, \text{ daher } C = -F(x_0); \text{ und}$$

$$u = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\cdot dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Es ist also nachgewiesen, daß unser neu definirtes Integral ganz mit dem früher durch das unbestimmte Int. definirten, übereinstimmt.
Die Bedingung der Continuität der Funktion ist keine unumgänglich nöthige; denn wenn die Funktion zwischen x_0 u. x_1 ein od. mehrmals endliche Discontinuitäten erleidet, so kann man das Integral abtheilen an den Stellen der Unstetigkeit, so daß man nun lauter einzelne Integrale erhält, welche sich auf eine continuirliche Funktion beziehen. Die Summe dieser Integrale macht aber das Gesammt-Integral aus, folglich —.

Die stillschweigend gemachte Voraussetzung daß die Grenzen x_0 u x_1 endliche Größen seien, ist nothwendig, um den Begriff des Integrals als Summe festhalten zu können; wenn also die eine Grenze z.B. $x_1 = +\infty$ ist, so läßt sich darauf unsere neue Definition des best. Integrals nicht unmittelbar anwenden. Um nun in solchem Fall immer eine klare Vorstellung zu behalten, hat man sich folgende Ansichten gebildet:

Man denkt sich das best. Int. von der unteren Grenze x_0 bis zur oberen X gebildet, wo X eine sehr große Zahl sein soll. So wird das Integral eine Funktion v. X sein; in dieser Funktion aber lasse man nun X gegen das Unendliche convergiren und sehe zu, ob sie sich einer endlichen u. best. Grenze annähert, welche dann das zwischen x_0 u ∞ genommene Integral sein wird.
Was endlich die Theilung des Intervalls von

x_0 bis x_1 betrifft. So ist, wie aus dem Vorhergehenden sich ergibt, der Grenzwerth der Productensumme (I) ganz unabhängig von der Art der Eintheilung; Nur müssen sich die aufeinander folgenden ξ mit wachsendem n einander ∞ nähern.

Wir können ein best. Int. auf zweierlei Weise erhalten, nämlich einmal durch Ausführung der unbestimmten Int. u. Einsetzung der Grenzen, und dann durch wirkliche Summirung der Productensumme I. indem man dabei irgend ein Gesetz für die Theilung des Intervalls $x_1 - x_0$ zu Grunde legt.

Nimmt man die Intervalle $\xi_1 - x_0, \xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2 \dots$ aequidistant, oder also jede dieser Differenzen als einander gleich an, so sei diese $= h$ und dann ist unsere Definitionsgl. die folgende:

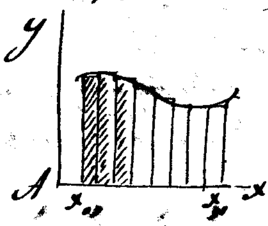
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \lim_{h=0} h\big(f(x_0) + f(x_0+h) + f(x_0+2h) + \dots + f(x_0+(n-1)h)\big)$$

wobei $\frac{x_1 - x_0}{n} = h$ ist. Die Bezeichnung des best. Integrals linker Hand ist dieser speziellen Annahme vollkommen gemäß, denn das Integralzeichen ist ursprünglich aus einem Summenzeichen (S) entstanden, wie es Leibnitz gebraucht hat. Dieses Zeichen mit den beiden Grenzen bezeichnet also:

„Man soll in der Fct. $f(x)$ an das dem Integralzeichen „für x, unter der Annahme $h = dx$, successive setzen „$x_0, x_0 + dx, x_0 + 2dx, \dots x_0 + (n-1)dx$, und alle diesen „Werthen entsprechenden Functionswerthe mit dx „multipliciren und hierauf alle diese Elemente „oder Elementarbestandtheile summiren und, wenn „dies geschehen dx zu 0 werden lassen."

Das Differenzial dx dient also auch hier, wie in der Differenzial-Rechnung nur zur Vermittlung eines unendlichen Processes, u. hat keinen selbstständigen Werth. — Der Process des Integrirens ist also nichts anderes, als die Summirung unendlich vieler einander unendlich nahe liegender Elemente, wovon jedes aus einem Functionswerth und dem Incremente dx zusammengesetzt ist. Umgekehrt also wird man, wo es sich um die Summirung solcher Elemente handelt, denen ein allgem. Gesetz gegeben ist, diese Summirung auf eine Integration zurückführen können u. hierin liegt hauptsächlich die Anwendung der Int. Rechn. auf Geometrie

und Mechanik, wie wir zeigen werden.
Es ist sehr wichtig das bestimmte Integral geometrisch zu veranschaulichen. Denken wir uns nämlich, es sei $f(x)$ die Ordinate einer Curve, wovon x die Abscisse, denken wir uns ferner es werde das Intervall zwischen x_0 u. x_1 in n Theile getheilt, wovon jeder $= h$ ist und für jeden Theilpunkt die Ordinate berechnet und aufgetragen, so werden diese sein $f(x_0)$ $f(x_0+h)$, $f(x_0+2h)$ ... $f(x_0+(n-1)h)$.



Man wird alsdann durch Verbindung der Endpunkte der Ordinaten eine Curve erhalten und die Producte in summa $h f(x_0) + h f(x_0+h) + h f(x_0+2h) + \dots h f(x_0+(n-1)h)$ stellt offenbar nichts anderes dar, als die Summe der Inhalte der eingeschriebenen Rechtecke, welche sich ohne Ende dem Flächenraume nähert, der von den beiden Endordinaten, dem Stück $x_1 - x_0$ der Abscissenachse und der Curve eingeschlossen ist. Diese Darstellung des best. Integr. ist nicht minder allgemein, als die analytische, sie ist es sogar insofern, als die Curve eine von freier Hand gezeichnete krumme Linie sein kann, allgemeiner als die analytische, welche immer die analyt. Darstellbarkeit der $f(x)$ erfordert.
Die Entwicklung des best. Int. gibt uns also den Flächenraum einer Curve oder löst die Aufgabe der „Quadratur" derselben, weshalb man häufig die Integration schlechtweg eine Quadratur nennt. Schon Archimedes bestimmte den Flächeninhalt der Parabel u. Wallis, ohne die Integral-Rechnung zu kennen, quadrirte alle Curven deren Gl. $y = ax^n$. Beide integrirten daher schon, aber in dem Sinne der Summirung u. ohne die Methode der Integration zu kennen. Wohl aber war ihnen das Wesen des Integrals klar, das man sich stets gegenwärtig halten muß. — Wie vorauszusehen lassen sich die früheren Sätze über das best. Integral auch nach unserer neuen Anschauung derselben ableiten; wir thun dies um so mehr, als sich noch andere wichtige Sätze anschließen lassen.

1. Die Gleichung: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{x_1} f(x)\,dx$

(wo ξ zwischen x_0 u. x_1 liegen soll) versteht sich nach unserer Definition von selbst.

3. Die Gleichung $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx$

läßt sich leicht einsehen, wenn man in der Definitions-gleichung einmal $\frac{x_1-x_0}{n}=h$ und dann $\frac{x_0-x_1}{n}=h_1=-h$ setzt.

4. Es sei $\psi(x)$ eine stetige und zwischen x_0 u. x_1 endlich bleibende Function, welche innerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht ändert; es sei $\varphi(x)$ eine andere, endlich bleibende Function und M der größte N der kleinste Werth v. $\varphi(x)$ innerhalb der bezeichneten Grenzen so werden die Differenzen: $M-\varphi(x)$ u. $N-\varphi(x)$ entgegengesetzte Zeichen haben, dasselbe wird der Fall sein bei den Producten $(M-\varphi(x))\psi(x)$ und $(N-\varphi(x))\psi(x)$ ~~und~~ auch noch bei den zwischen den Grenzen x_0 u. x_1 genommenen Integralen derselben. Es haben also die Größen

$M\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\psi(x)\,dx$. und $N\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\psi(x)\,dx$, entgegengesetzte Zeichen; folglich muß:

$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\psi(x)\,dx$ zwischen den Prod: $M\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx$ u. $N\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx$ liegen. Es muß also auch eine Größe μ zwischen M u. N liegen, welche mit $\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx$ multiplicirt, jenem Integrale genau gleich ist. Diese Größe μ wird aber einer der Werthe v. $\varphi(x)$ welche zwischen M u. N liegen, und zwar für ein $x = x_0+\varepsilon(x_1-x_0)$, wobei ε ein positiver ächter Bruch ist. Man hat daher die wichtige Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(x_0+\varepsilon(x_1-x_0))\cdot\int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx$$

Die Größe ε ist unbekannt und eine Function v. x_0 u. x_1 wir kennen nur ihre Grenzen 0 u. 1. Dieser Satz ist wichtig für die Discussion u. Schätzung bestimmter Integrale. Man habe

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2}\cos x\,dx$, welches Integral nicht findbar ist. Setzt man hierin $\varphi(x)=e^{-x^2}$, so ist $M=1$ und $N=e^{-(\frac{\pi}{2})^2}$ $\psi(x)=\cos x$; $x_0=0$, $x_1=\frac{\pi}{2}$; daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2}\cos x\,dx = e^{-\varepsilon^2(\frac{\pi}{2})^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = e^{-\varepsilon^2(\frac{\pi}{2})^2}$$

Mit Hülfe dieses Satzes läßt sich ferner das Rest-Glied der Taylor'schen Reihe bestimmen.

$f(z) = f(z-h) + h f'(z-h) + \frac{h^2}{1.2} f''(z-h) + \cdots + \frac{h^m}{1.2\cdots m} f^{(m)}(z-h) + \Psi(h) - \Psi(0)$

wobei $\Psi(x) = \frac{(-1)^m}{1.2.3\cdots m}\cdot\int_0^h (h-x)^m \cdot f^{(m+1)}(x+z-h)\,dx$ ist, wodurch man hat: $f(z) = f(z-h) + h f'(z-h) + \cdots + \frac{h^m}{1.2\cdots m} f^{(m)}(z-h) +$

$+ \frac{1}{1.2\cdots m}\int_0^h (h-x)^m \cdot f^{(m+1)}(x+z-h)\,dx$

Setzt man $z-h=\xi$, so ist $z=\xi+h$ und man hat alsdann:

$f(\xi+h) = f(\xi) + h f'(\xi) + \frac{h^2}{1.2} f''(\xi) + \cdots + \frac{h^m}{1.2\cdots m} f^{(m)}(\xi) + \frac{1}{m!}\int_0^h (h-x)^m f^{(m+1)}(x+\xi)\,dx$

Setzt man nun $\Psi(x) = (h-x)^m$ und $\varphi(x) = f^{(m+1)}(x+\xi)\cdot dx$, so ist nach dem vorigen Satze:

$\int_0^h (h-x)^m f^{(m+1)}(x+\xi)dx = f^{(m+1)}(\xi+\varepsilon.h)\cdot\int_0^h (h-x)^m dx = \frac{h^{m+1}}{m+1} f^{(m+1)}(\xi+\varepsilon.h)$

Die Taylor'sche Reihe mit ihrem Restausdruck heißt also, wenn man nun x für ξ schreibt:

$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x+\varepsilon.h)$

Diese Reihe ist die von Cauchy mitgetheilte; sie setzt voraus, daß die Functionen:

$f(x), f'(x), f''(x), \ldots\ldots f^{(m+1)}(x)$ endlich u. stetig bleiben für alle Werthe von x zwischen 0 u. h. Als speciellen Fall führen wir an, für $m=1$

$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x+\varepsilon.h)$ und für $m=0$

$f(x+h) = f(x) + h f'(x+\varepsilon.h)$, welche letztere Gl. in vielen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt.

Als drittes Beispiel zu obigem Satze nehmen wir an $\Psi(x)=1$, so ist: $\int_{x_0}^{x_1} 1.\varphi(x)dx = \varphi(x_0+\varepsilon(x_1-x_0))\int_{x_0}^{x_1} 1.dx$; oder also, man hat für jedes best. Integral die Gleichung: $\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)dx = (x_1-x_0)\cdot\varphi(x_0+\varepsilon(x_1-x_0))$

Geometrisch ergibt sich dieses Resultat, wenn man festhält, daß das best. Int. den Flächenraum einer Curve auf der Basis x_1-x_0 darstellt. So muß nun ein Rechteck geben, welches die gleiche Basis hat u. dessen Inhalt jenem der Curve gleich ist. Die Höhe dieses Rechtecks muß offenbar zwischen dem größten und kleinsten Werth der Ordinate liegen und also wenigstens einer Ordinate der Curve gleich sein woraus sich der Satz ergibt:

5) Man theilt die Functionen oft in gerade u. ungerade ein. Unter einer geraden ~~Function~~ Function versteht man eine solche, welche ihr Zeichen und ihren Werth

nicht ändert, wenn man das Zeichen der Veränderlichen in das entgegengesetzte verwandelt. Ihre Definitionsgleichung ist also: $f(-x) = +f(+x)$ zB:

$\cos x,\ \sec x,\ x^2,\ x^{2m},\ l(1+x^2)\dots$

Ungerade Functionen dagegen nennt man solche, welche zwar ihren Werth nicht, wohl aber ihr Zeichen ändern, wenn man das der Variabeln ändert. Ihre Definitionsgleichung ist also $f(-x) = -f(+x)$

zB. $\sin x,\ x,\ x^{2m+1},\ x \cdot l(1+x^2), \dots$

Es sei nun $f(x)$ eine gerade function, so ist:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

wie sich ohne weiteres ergibt durch Fig(a).

(Fig a).

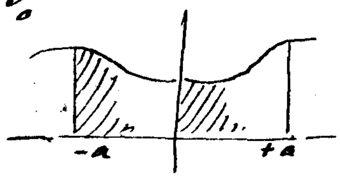
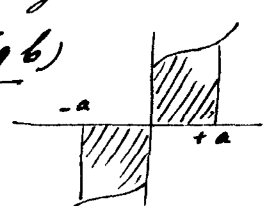


Fig b)



Es sei ferner $f(x)$ eine ungerade function, so ist:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{(Fig b)}.$$

zB.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx,$$

weil e^{-x^2} eine gerade function ist.

Ebenso: $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ferner die Beispiele über ungerade functionen: $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}} = 0$; ebenso $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin x\,dx = 0$

6. Wenn ein bestimmtes Integral nach seiner obern Grenze differenzirt werden soll, so lasse man x_1 um Δx_1 wachsen; dann geht es über in

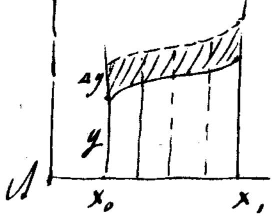
$$\int_{x_0}^{x_1+\Delta x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_1+\Delta x_1} f(x)\,dx \quad \text{oder nach (4)}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \Delta x_1 f(x_1+\varepsilon\Delta x_1)$$

und die Änderung der function ist also $\Delta x_1 f(x_1+\varepsilon\Delta x_1)$ und durch Δx_1 dividirt, erhält man für $\Delta x_1 = 0$ werdend den Differenzialquotienten $f(x_1)$. Ganz auf ähnliche Weise verfährt man bei der Differentiation nach der untern Grenze.

7. Die Differentiation des bestimmten Integrals von x_0 bis x_1 $\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$ nach der Größe y, wovon x_0 u. x_1 nicht abhängen, hat die folgende geometrische Bedeutung. Die Größe y constant nach x bedeutet einen Parameter der Curve, wie zB. y in der Gl. $z = \sqrt{x \cdot y}$ den Parameter einer Parabel bedeutet. Läßt man nun dieses y um Δy variiren

so bewegt sich die ganze Curve und ihre Lage und dadurch ändert sich der Flächenraum um den zwischen beiden Curven entstehen. Dieser wird durch Δy ist die Bedeutung des Differentialquotienten des Integrals.



8. Soll ein best. Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx$ nach y integrirt werden, wenn vorausgesetzt wird, es hängen x_0 u x_1 mit y nicht zusammen, so kann die Integration nach y unter dem Integralzeichen geschehen, oder mit andern Worten das Doppelintegral

$\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\right)$ kann auch in der umgekehrten Ordnung: $\int_{x_0}^{x_1} dx\left(\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\right)$ ausgeführt werden. — Zum Beweise hierfür gelangt man durch die Definitions-Gleichung:

$$\int_{y_0}^{y_1} \Psi(y)\,dy = \lim_{h=0} h\left(\Psi(y_0) + \Psi(y_0+h) + \dots \Psi(y_0+(n-1)h)\right)$$ Ist nun
$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx$$, so hat man:

$$\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\right) = \lim_{h=0}\left(h\int_{x_0}^{x_1} f(x,y_0)\,dx + h\int_{x_0}^{x_1} f(x,y_0+h)\,dx + h\int_{x_0}^{x_1} f(x,y_0+2h)\,dx + \dots + h\int_{x_0}^{x_1} f(x,y_0+(n-1)h)\,dx\right)$$

$$= \lim_{h=0}\left(\int_{x_0}^{x_1} h\left(f(x,y_0) + f(x,y_0+h) + \dots f(x,y_0+(n-1)h)\right)dx\right) = \int_{x_0}^{x_1} dx\left(\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\right)$$

also: $$\int_{y_0}^{y_1} dy\left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\right) = \int_{x_0}^{x_1} dx\left(\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\cdot dy\right)$$ Für die Anwendung dieses Satzes folgendes Beispiel:

früher fanden wir:

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\cdot\cos(yx)\,dx = \frac{k}{k^2+y^2}, \text{ und: } \int_0^{\infty} e^{-kx}\sin(yx)\,dx = \frac{y}{k^2+y^2}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit dy u integrirt sie zwischen den Grenzen 0 u α und bemerkt, daß:

$$\int_0^{\alpha} \cos(yx)\,dy = \frac{\sin(\alpha x)}{x} \text{ und } \int_0^{\alpha} \sin(yx)\,dy = \frac{1-\cos(\alpha x)}{x},$$

so wird, wenn man zuerst nach y und dann nach x integrirt, erfolgen

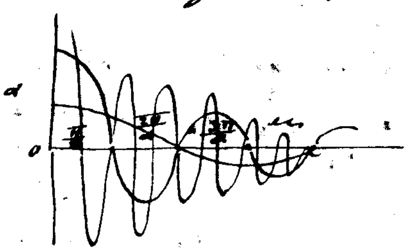
$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\cdot dx\left(\int_0^{\alpha}\cos(yx)\,dy\right) = \int_0^{\alpha}\frac{k\cdot dy}{k^2+y^2} \text{ und}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}\cdot dx\left(\int_0^{\alpha}\sin(yx)\,dy\right) = \int_0^{\alpha}\frac{y\,dy}{k^2+y^2};$$ woraus erfolgen wird:

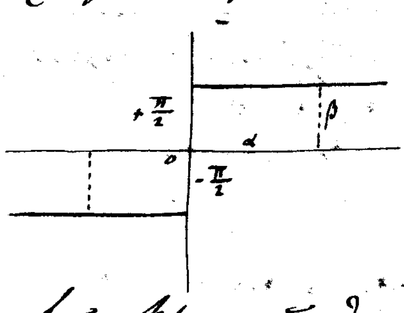
$$\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{k}\,,\quad \text{und} \int_0^\infty e^{-kx}\frac{1-\cos(\alpha x)}{x}.dx = \frac{1}{2}l\left(\frac{\alpha^2+k^2}{k^2}\right)$$

Setzt man in der ersten Gleichung $k=0$, so ist die rechte Seite $+\frac{\pi}{2}$ od. $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem α positiv oder negativ ist und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}.dx = \pm\frac{\pi}{2}$$



Das Integral ist von dem Zahlenwerth von α unabhängig; der Flächenraum der Curve bleibt also, obschon diese mit α ihre Gestalt verändert, doch immer derselbe; nur das Zeichen v. α bestimmt das Zeichen des Integrals; ist α negativ so ist der erste Streifen, welcher immer der größte ist negativ u. überwiegt die Summe aller folgenden. Faßt man dagegen das Integral als eine Function v. α oder als Ordinate β einer Curve auf, deren Abscisse α ist, deren Gleichung also $\beta = \int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{x}.dx$ ist, so ist die Ordinate immer $=+\frac{\pi}{2}$ für ein positives α und die Curve stellt eine unendlich gerade Linie dar, welche in dem Abstand $\frac{\pi}{2}$ von der Abscissenaxe zu derselben parallel läuft. Bei $\alpha=0$ aber ist das Integral $=0$; für ein noch kleineres, also negatives α ist es $=-\frac{\pi}{2}$ u. behält diesen Werth für jedes negative α, so daß die Curve eine andere Parallele zur Abscissenaxe gibt. Das Integral ist also eine discontinuirliche Function und macht bei $\alpha=0$ einen Sprung von $+\frac{\pi}{2}$ durch 0 auf $-\frac{\pi}{2}$ in zwei Absätzen.

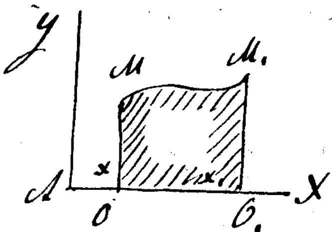


Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie.

Diese soll hier in der Rectification u. Quadratur der Curven u. später auch in der Cubatur u. Complanation der Rotationsflächen bestehen.

A. <u>Quadratur</u> der Curven. Diese beschäftigt sich mit der Aufgabe den Flächenraum zu finden, welcher von einem gegebenen System von Linien (Curven) eingeschlossen wird. Die einfachste Form dieser Aufgabe ist die, daß man den Raum finden soll, welcher zwischen einem Curvenzweig dessen Ordinate eine eindeutige Fct. der Absc. ist und zwei Ordinaten und der entsprechenden Abscissen-differenz enthalten ist; diese Aufgabe ist im allgemeinen durch das Vorhergehende bereits gelöst, und nun für die geometrische Darstellung des best. Int. ist. In der That bezeichnet man mit $f(x)$ eine solche Fct. und sind x_0, x_1, zwei best. Werthe v. x so drückt das Integral

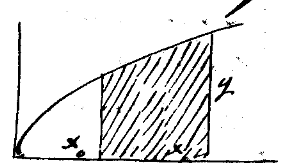
$S = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ den Flächenraum OMM_1O_1 aus.



Wir werden jedoch die obere Grenze x_1 mit der Integrationsveränderlichen x verwechseln, wie dies der Kürze wegen meist geschieht. Um die hier mögliche Verwirrung zu heben, welche aus der verschiedenartigen Setzung der beiden Größen entstehen könnte erinnern wir an die früher Bemerkung, wonach das Zeichen, dessen man sich für die Integrationsveränderliche bedient nach Einsetzung der Grenzen völlig gleichgiltig ist, seine Vertauschung also auf das Endresultat keinen Einfluß hat, was man nur auch für die obere Grenze x setzen mag.

Einige Beispiele der Curvenquadratur sind:

1. Man soll den Inhalt finden, welcher von einer der Parabel u. 2 Endordinaten eingeschlossen ist. $f(x)=\sqrt{px}$; unbestimmt integrirt hat man $\int \sqrt{px}\cdot dx = \frac{2}{3}x\sqrt{px} + C$ zwischen den Grenzen x_0 u. x genommen ist



$\int_{x_0}^{x} \sqrt{px}\cdot dx = \frac{2}{3}\sqrt{p}\left(x^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right)$ Will man die Abscisse vom Scheitel an zählen so ist $x_0=0$ und man hat $S = \frac{2}{3}x\sqrt{px} = \frac{2}{3}x.y$; dies ist das von Archimedes zuerst gefundene Resultat, welches den bekannten Satz ausspricht, daß der parabolische Abschnitt $= \frac{2}{3}$ des Rechtecks aus Abscisse u. Ordinate ist. 2.) Man soll auf gleiche Weise alle Curven quadriren deren Gl. $y = ax^n$. Unbestimmt integrirt erhält man $\int y.dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$ zwischen den Grenzen x_0 u. x, genommen erh. man $\frac{a}{n+1}\left(x^{n+1} - x_0^{n+1}\right)$ Ist z.B. $n=3$, so ist $y = ax^3$ u. $S = \frac{a}{4}\left(x^4 - x_0^4\right)$ für $x_0=0$ ist $S = \frac{ax^4}{4} = \frac{xy}{4}$. Setzt man für ein allgemeines n, $x_0=0$ so ist ebenfalls $S = \frac{xy}{n+1}$; für $n=\frac{3}{2}$ hat man die Neil'sche Parabel (die Evolute der gew. Parabel) deren Gl. $ax^{\frac{3}{2}} = y$ u. $S = \frac{2a}{5}\left(x^2\sqrt{x} - x_0^2\sqrt{x_0}\right)$ und für $x_0=0$ ist $S = \frac{2a}{5}x^2\sqrt{x}$ In diesen Gleichungen liegen die von

Wallis zuerst gefundenen Resultate.

3. Die Gl. des Kreises ist $y=\sqrt{r^2-x^2}$. Es ist der Abschnitt
$S=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{r^2-x^2}$ Unbestimmt integrirt erhält man

$$\int d\sqrt{r^2-x^2}=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{-2\sqrt{-1}}\cdot\arcsin\frac{-x}{\sqrt{r^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+C$$

Zwischen den Grenzen genommen hat man: $S=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}-\frac{x_0}{2}\sqrt{r^2-x_0^2}+\frac{r^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{r}-\arcsin\frac{x_0}{r}\right)$, für $x_0=0$ ist $S=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{r}$, und für $x=r$ erhält man den Quadranten $S=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{r^2}{2}\arcsin 1=\frac{\pi r^2}{4}$ für den Inhalt des ganzen Kreises $S=\pi r^2$

4. Die Gl. der Ellipse ist $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ um also den Abschnitt zu finden, braucht man nur im vorigen Beispiel $r=a$ zu setzen und S mit $\frac{b}{a}$ zu multipliciren, dann erhält man

$$S=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x_0}{2}\sqrt{a^2-x_0^2}+\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin\frac{x_0}{a}\right)\right)$$

Für $x_0=0$ und $x=a$ erhält man den Inhalt des Ellipsenquadranten
$S=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin 1=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\cdot ab}{4}$, mithin die ganze Ellipse
$S=\pi\cdot ab$.

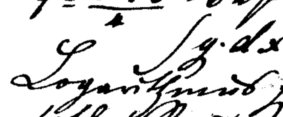
5. Die Gleichung der Hyperbel ist $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Unbestimmt integrirt erhält man $\frac{b}{a}\int dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}l(x+\sqrt{x^2-a^2})\right)+C$
Zwischen den Grenzen x_0 und x genommen, erhält man
$S=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{x_0}{2}\sqrt{x_0^2-a^2}-\frac{a^2}{2}l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}\right)$ für $x_0=a$ ist

$$S=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)=\frac{bx}{2a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Verlangt man den Abschnitt des Raumes, der zwischen den Assymptoten der Hyperbel u. der Curve enthalten ist, so muss man von der Gl. bezogen auf die Assymptoten ausgehen. Diese Gl. ist für die rechtwinklige Hyperbel $y=\frac{q^2}{x}$, worin q den Namen Potenz der Hyperbel erhalten hat u. durch die Gleichung $q^2=\frac{a^2+b^2}{4}$ bestimmt ist. Unbestimmt integrirt erhält man.

$\int y\cdot dx=q^2 lx+C$ also $S=q^2 l\frac{x}{x_0}$ Der Name Hyperbel. Logarithmus hat seinen Ursprung darin, dass sich der asymptotische Raum so einfach durch die natürlichen Logarithmen ausdrücken lässt. Sowohl für $x_0=0$ als auch für $x=\infty$ hat man $S=\infty$. d.h. der Raum zwischen der Hyperbel u. ihren Assymptoten hat kein endliches Maass. Für die schiefwinklige Hyperbel auf ihre Assymptoten bezogen hat man, wenn α der Assymptotenwinkel bestimmt durch die Gl. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}$; $y=\frac{q^2}{x}$

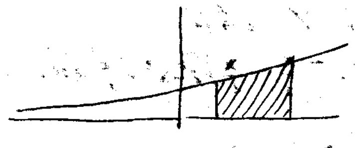
Das Element des Raumes ist $y\cdot dx\cdot\sin\alpha$, also



$S=q^2\sin\alpha\, l\frac{x}{x_0}$

6. Die Gleichung der log. Curve ist $y=a\,e^{\frac{x}{a}}$

Unbestimmt integrirt: $\int y\cdot dx=a^2 e^{\frac{x}{a}}+C$. zwischen x_0 u. x genommen hat man $S = a^2(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}})$; für $x_0 = -\infty$ ist $S = a^2 e^{\frac{x}{a}}$ für $x = 0$ ist $S = a^2$



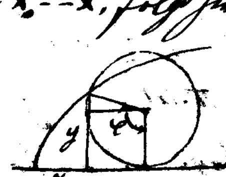
7. Aus der Gl. der log. Curve erhält man bekanntlich schließlich die Kettenlinie, denkt man sich nämlich die logarithmische Curve gezeichnet, und sie alsdann um die Ordinatenaxe gedreht, so daß sie die entgegengesetzte Lage annimmt, so wird man 2 Curven erhalten deren Ordinaten $ae^{\frac{x}{a}}$ u. $ae^{-\frac{x}{a}}$ sind, aus diesen beiden Curven kann man eine dritte ableiten, dadurch, daß man das arithm. Mittel aus den zu gleichen Abscissen gehörigen Ordinaten nimmt, die Verbindung der erhaltenen Punkte gibt eine gewisse Curve die man Kettenlinie nennt. Ihre Gleichung ist $a\cdot\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2} = y$

Unbestimmt integrirt erhält man $\int y\,dx = \frac{a^2}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) + C$

Von x_0 bis x genommen ist $S = \frac{a^2}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}}) - \frac{a^2}{2}(e^{-\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}})$, für $x_0 = -x$, folgt hieraus

$S = \frac{a^2}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) - \frac{a^2}{2}(e^{-\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}) = a(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$

8. Man soll die Cycloide quadriren.



Die Gl. sind $x = a\varphi - a\sin\varphi = a(\varphi - \sin\varphi)$

$y = a - a\cos\varphi = a(1-\cos\varphi)$

$\varphi = \arccos\frac{a-y}{a}$ also $x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$

Es ist aber $dx = a(1-\cos\varphi)d\varphi$ und $y\,dx = a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi$, also

$\int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{a\varphi_0}^{a\varphi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi$. Es ist aber $(1-\cos\varphi)^2 = 1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi$

$= 1 - 2\cos\varphi + \frac12 + \frac12\cos 2\varphi = \frac32 - 2\cos\varphi + \frac12\cos 2\varphi$. Unbest. integrirt ist $\int a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2(\frac32\varphi - 2\sin\varphi + \frac14\sin 2\varphi) + C$, also

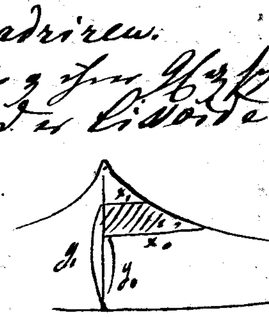
$\int_{a\varphi_0}^{a\varphi} a^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\left(\frac32(\varphi-\varphi_0) - 2(\sin\varphi - \sin\varphi_0) + \frac14(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0)\right)$

Um den Inhalt ganzer Cycloide zu finden, setze man $\varphi_0 = 0$, $\varphi = 2\pi$, dann wird $S = 3a^2\pi$.

Der Inhalt der Cycloide ist also = dem 3fachen Inhalte des Erzeugungskreises.

9. Man soll die Cissoide des Diokles quadriren.

(Über ihre Entstehungsart und die Herleitung ihrer Gl. sehe man das Differenzialheft). Für die Gl. der Cissoide hat man $x^2 y = (2a-y)^3$ oder $x = (2a-y)\sqrt{\frac{2a-y}{y}}$



Um diese Curve bequemer quadr. zu können, als es möglich wäre, wenn man das Element ~~y.dy~~ y.dx durch x ausdrückte, so nimmt man die horizont. Element x.dy nehmen das Integral desselben zwischen den Grenzen y_0 u. y so erhält man: $S = \int_{y_0}^{y}(2a-y)\sqrt{\frac{2a-y}{y}}\,dy$. Setzt man $\frac{2a-y}{y} = t^2$, so ist $y = \frac{2a}{t^2+1}$ also $(2a-y) = \frac{2at^2}{t^2+1}$; $dy = \frac{2a\cdot 2t\,dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}$

folglich hat man: $\int \frac{2t^2 \cdot a \cdot t}{t^2+1}\left(-\frac{4at}{(t^2+1)^2}\cdot dt\right) = -8a^2\int\frac{t^4\, dt}{(t^2+1)^3}$

Dieses Integral läßt sich mittelst der bin. Differentials leicht finden, nach Formel (E).

Wir wollen aber diese Gelegenheit benutzen, und noch eine Zerfällungsart in Partialbrüche angeben, die in der Einleitung übersehen wurde; Man setze $t^2=z$, so ist der Bruch unter dem Integralzeichen $\frac{z^2}{(1+z)^3} = \frac{A}{(1+z)^3}+\frac{B}{(1+z)^2}+\frac{C}{1+z}$, folglich hat man

$z^2 = A + (B + Bz) + C(1+2z+z^2) = A + (1+z)B + (1+z)^2 C$ Setzt man $z=-1$ so ist $A=1$ und man hat $z^2-1 = B(1+z) + C(1+z)^2$; dieß ist theilbar durch $1+z$; führt man die Division aus, so ist $B + C(z+1) = z-1$ für $z=-1$ ist $B=-2$ und man hat $z+1 = C(z+1)$; dividirt man ~~mit~~ diess mit $z+1$, so ist $C=1$; es ist also

$$\frac{z^2}{(1+z)^3} = \frac{1}{(1+z)^3} - \frac{2}{(z+1)^2} + \frac{1}{1+z} \text{ od. } \frac{t^4}{(1+t^2)^3} = \frac{1}{(1+t^2)^3} - \frac{2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t^2},$$

also $\int\frac{t^4\,dt}{(t^2+1)^3} = \int\frac{dt}{(t^2+1)^3} - 2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} + \int\frac{dt}{t^2+1}$

Wendet man die Reductionsformel (D) an, so ergibt sich

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2} \text{ u. } \int\frac{dt \cdot t^4}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \operatorname{arc\,tg} t - \frac{5}{4}\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

Die Reductionsformel nochmals angewendet ist

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t, \text{ also } \int\frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^3} = \left(\frac{t}{4(1+t^2)^2} - \frac{5t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} t\right) + C$$

Bringt man auf gemeinschaftlichen Nenner in der Klammer so hat man $\int\frac{t^4\,dt}{(1+t^2)^3} = -\frac{t^3}{4(t^2+1)^2} - \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg} t$.

wie ~~es~~ sich unmittelbar nach Formel (E) ergeben hätte.

Substituirt man so ergibt sich

$$\int(2a-y)\sqrt{\frac{2a-y}{y}}\cdot dy = -8a^2\left(\frac{y}{16a^2}\sqrt{2ay-y^2} - \frac{3}{16a}\sqrt{2ay-y^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2a-y}{y}}\right)$$

$$= \left(-\frac{y}{2}+\frac{3a}{2}\right)\sqrt{2ay-y^2} - 3a^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2a-y}{y}} + C.$$

Zwischen den Grenzen y_0 u. y genommen erhält man

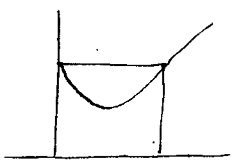
$$S = \frac{3a-y}{2}\sqrt{2ay-y^2} - \frac{3a-y_0}{2}\sqrt{2ay_0-y_0^2} - 3a^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2a-y}{y}} + 3a^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2a-y_0}{y_0}}$$

Um den halben Raum zu erhalten, setze man $y_0=0$ u. $y=2a$, dann wird $S=\frac{3a^2\pi}{2}$ und ihr ganzer Raum $S=3a^2\pi$.

Die Cissoide hat also denselben Raum, wie die Cycloide wenn beide Gl. erzeugungskreise haben.

10. Man soll die Curve quadriren, deren Ordinate $y=x^x$ und zwar, ~~wenn~~ $x=0$, bis $x=1$. $y=x^x$ wird für $x=0$ zu 0^0 ~~denn~~ da aber $x^x = e^{x\,lx}$ und der Exponent für $x=0$ die Form $\frac{0}{0}$

annimmt, so differenziere man denselben, so ist er



$\frac{dx}{d\frac{1}{lx}} = -x$, folglich ist für $x=0$; $y = e^{-0} = 1$ und für $x=1$ ist y wieder $=1$

Es ist nun $S = \int_0^1 x^x dx$. Wir fanden früher

$\int x^x dx = 1 + \int x lx\, dx + \frac{1}{1.2}\int (x lx)^2 dx + \dots$

Diese Integrale sind von der Form $\int (x lx)^n dx$, wofür wir fanden $\int (x lx)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(l(x)^n - \frac{n (lx)^{n-1}}{n+1} + \dots + (-1)^n \frac{1.2.3\dots n}{(n+1)^n}\right)$

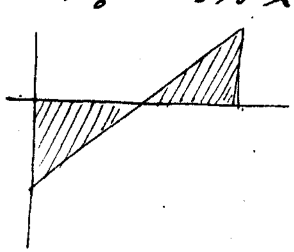
Für die untere Grenze $x_0=0$ nimmt dieser Ausdruck eine unbestimmte Form an. Um jedoch den wahren Werth zu finden untersuche man den Ausdruck $x^\nu (lx)^\mu$, wobei $\nu < \mu$; kann man nun zeigen dass für $\mu = \nu$ das Produkt verschwindet, so wird es dies um so mehr für $\mu > \nu$. Betrachten wir also das Produkt $(x lx)^\mu = \left(\frac{lx}{\frac{1}{x}}\right)^\mu$, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden für $x=0$ das Produkt $x^\nu (lx)^\mu = 0$, es ist also $\int_0^1 (x lx) dx = (-1)^n \frac{1.2.3\dots n}{(n+1)^{n+1}}$, folglich $S = \int_0^1 x^x dx = \frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \dots$ welche bemerkenswerthe Reihe zuerst Johann Bernoulli gefunden hat.

Bisher wurde vorausgesetzt die Curve durchschneide innerhalb der Grenzen x_0 u. x die Abscissenachse nicht. Verlangt man nun immer noch den Flächenraum zwischen der Curve u. der Achse, wenn solches Durchschneiden stattfindet, so darf man nicht mehr das Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ für den Flächenraum betrachten, weil dieses negative Räume in sich schließt, die man positiv in Rechnung bringen sollte; Man muß für das Integral abtheilen und die positiven und neg. Räume besonders in Rechnung bringen; zu diesem Ende muß man die Durchschnittspunkte finden, welche sich ergeben, wenn man $f(x)=0$ setzt und die Gl auflöst; es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ die Wurzeln dieser Gl; so wird der verlangte Raum

$$S = \int_{x_0}^{\alpha_1} f(x)dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)dx - \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} f(x)dx + \dots + \int_{\alpha_n}^{x} f(x)dx$$

Einige Beispiele werden dies noch mehr erläutern

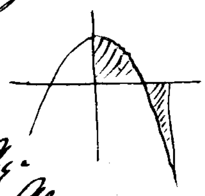
1. Man soll den Raum finden, zwischen der Achse u. der geraden Linie, deren Gl $f(x) = y = x-1$ und zwar v. $x_0=0$ bis $x=2$. Aus der Gl $f(x)=x-1=0$ folgt $\alpha_1 = 1$

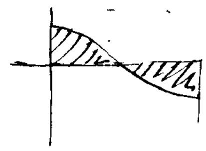


$$S = \int_0^1 (x-1)dx + \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2. Die Gl einer Parabel ist gegeben

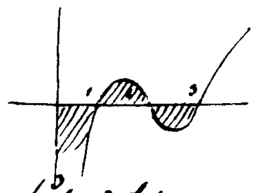
$y=1-x^2$. Man soll den Raum zwischen ihr und der Ax. v. $x_0=0$ und $x=2$ finden. Die Gl. $y=1-x^2=0$ gibt $x=+1=\alpha$, und man hat $\int_0^1(1-x^2)\,dx-\int_1^2(1-x^2)\,dx=2$.





3. Gegeben ist $y=\cos x$: Man soll den Raum zwischen Curve u. Ax. finden v. $x_0=0$ bis $x=\pi$. Die Gl. $y=\cos x=0$ gibt $x=\alpha_1=\frac{\pi}{2}$ und es ist $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=2$

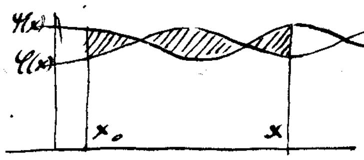
4. Die Gl. einer Curve ist $y=7x^3-4x^2+77x-42$. Man soll den Raum v. $x_0=0$ bis $x=3$ finden. Setzt man $7x^3-42x^2+77x-42=0$ so erhält man $\alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=3$ und $S=-\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx$

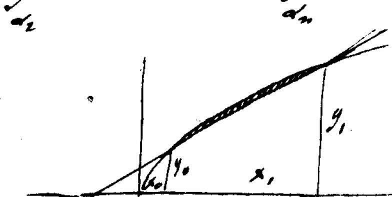


Schließlich stellen wir uns noch die allgemeinen Aufgab. den Raum zwischen 2 Curven zu finden, welche sich innerhalb der Grenzen x_0 u. x ein oder mehreremale schneiden. Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die Ordinaten der Curven, so darf man auch hier nicht glauben es sei $\int_{x_0}^{x}(\varphi(x)-\psi(x))\,dx$ der verlangte Werth. Man bestimme vor allem die Abscissen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ der zwischen x_0 u. x vorkommenden Durchschnittspunkte. Diese werden erhalten aus der Gleichung $\varphi(x)-\psi(x)=0$ und man hat alsdann wenn $\varphi(x)-\psi(x)=f(x)$

$$S=-\int_{x_0}^{\alpha_1}f(x)\,dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}f(x)\,dx-\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}f(x)\,dx\ \dots\ \pm\int_{\alpha_n}^{x}f(x)\,dx$$

Beispiel 1.





Die Gl. einer Parabel ist $\varphi(x)=\sqrt{px}$ und die einer geraden Linie ist gegeben; Man soll den Raum zwischen der Sehne welche die Gerade bildet, und der Curve finden.

Es ist $\psi(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x+\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot x+\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}$

Es ist also $S=\int_{x_0}^{x_1}\left(\sqrt{px}-\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x+\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}\right)\right)dx$. Wenn man partiell integrirt, so ist

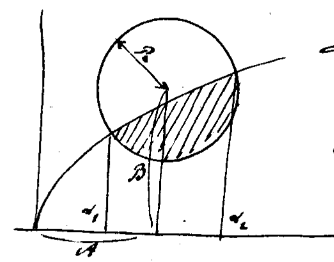
$\frac{2}{3}x\sqrt{px}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}+C$ und zwischen den Grenzen x_0 u. x_1 genommen folgt

$S=\frac{2}{3}(x_1y_1-y_0x_0)-\frac{y_1-y_0}{2(x_1-x_0)}(x_1^2-x_0^2)-(x_1y_0-x_0y_1)$ oder nach einiger Reduktion

$S=\frac{1}{6}(x_1y_1-x_0y_0)+\frac{1}{2}(x_0y_1-x_1y_0)$; oder da $x_0=\frac{y_0^2}{p}$ und $x_1=\frac{y_1^2}{p}$ folgt

$S=\frac{1}{6p}(y_1^3-3y_1^2y_0+3y_1y_0^2-y_0^3)=\frac{1}{6p}(y_1-y_0)^3$, woraus das bemerkenswerthe Resultat sich ergibt, daß das parabolische Segment nur von der Differenz der Coordinaten abhängt.

2. Die Gleichungen der Parabel $\varphi(x)=\sqrt{px}$ und eines Kreises $\psi(x) = B-\sqrt{R^2-(x-A)^2}$ sind gegeben, man verlangt den Inhalt des Abschnitts, den der Kreis u. die Parabel bilden.

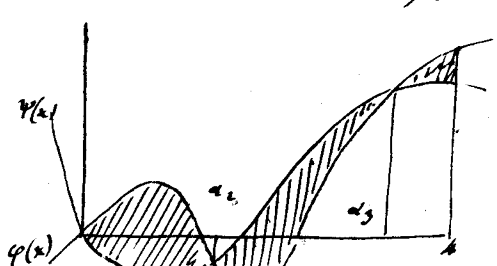


Es ist $S=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\sqrt{px}-B+\sqrt{R^2-(x-A)^2}\right)dx$, wobei α_1 u. α_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt{px} = B-\sqrt{R^2-(x-A)^2}$$

sind.

3. Die Gleichungen zweier Curven sind gegeben: $\varphi(x)=x^3-3x^2+2x$ und $\psi(x)=-x^3+7{,}5x^2-9x$, welchen Raum schließen sie ein von $x=0$ bis $x=4$.



Um α_1 und α_2; und α_3 zu berechnen hat man $x^3-3x^2+2x=-x^3+7{,}5x^2-9x$ woraus $\alpha_1=0$; dann hat man noch $x^2-5{,}25x+5{,}5=0$, woraus $x=2{,}625\pm$ also $\alpha_1=0$; $\alpha_2=1{,}458$, $\alpha_3=3{,}792$; mithin ist $S=\int_0^{\alpha_2} y\,dx-\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} y\,dx+\int_{\alpha_3}^{4} y\,dx$, wobei $\varphi(x)-\psi(x)=2x^3-10{,}5x^2+11x$ ist, also $\int y\,dx=\frac{1}{2}x^4-3{,}50x^3+5{,}5x^2+C$

4. Die Gleichungen $\varphi(x)=2x\sin x$; $\psi(x)=x$ sind gegeben. Man soll den Raum zwischen ihnen von x_0 bis $\frac{13}{6}\pi$ finden. Man setze $2x\sin x=x$, so ist $\alpha_1=0$ und $\sin x=\frac{1}{2}$, also $\alpha_2=\frac{\pi}{6}$, $\alpha_3=\frac{5}{6}\pi$, $\alpha_4=\frac{13}{6}\pi$ und man hat

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2x\sin x-x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2x\sin x-x)\,dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}}(2x\sin x-x)\,dx.$$

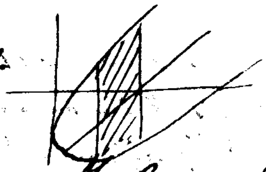
Unbestimmt integrirt ist:

$$\int(2x\sin x-x)\,dx=2\sin x-2x\cos x-\frac{1}{2}x^2+C$$

Unter den behandelten allgem. Fall gehört auch noch der, daß eine geschlossene Curve, deren Inhalt gefunden werden soll, Einbiegungen (Sinuositäten) hat, hier muß man die Bestimmung so treffen, daß man alle Punkte bestimmt, an welchen verticale Tangenten stattfinden, für welche also $\frac{dy}{dx}=\infty$ wird und daß man dann den Raum zwischen je 2 solcher Tangenten ermittelt u. dann genau die Gleichungen der zwischenliegenden Curventheilen bestimmt. Ferner ist hierher zu rechnen der Fall, daß von einer Curve ein Abschnitt verlangt wird, wovon die krummlinigen Begrenzungen auf entgegengesetzten Seiten der Axe liegen.

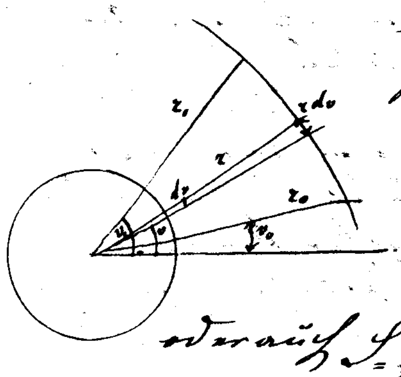
Beispiel. Für den Abschnitt v. x_1 bis x_2 der Parabel, deren Gl. $y=x-1+\sqrt{x}$ ist hat man nur in der allgemeinen

Formel $\varphi(x) = x - 1 + \sqrt{x}$ u. $\psi(x) = x - 1 - \sqrt{x}$ zu setzen.



Anwendung bei Polarcoordinaten

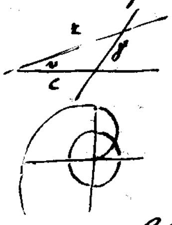
Es sei $r = f(v)$ und $v = F(r)$ die Gl. der Curve für Polarcoord. Man bilde wieder das Element des Raumes, so ist dies ein unendlich schmaler Sector; um seinen Inhalt zu finden lasse man v um dv wachsen, so ist $r\,dv$ die Grundlinie und r die Höhe, folglich $\frac{r^2}{2}dv$ der Flächeninhalt des Elements. Summirt man die Elemente zwischen den Grenzen v_0 u. v, so folgt $S = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} r^2 dv = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} (f(v))^2 \cdot dv$



oder auch $S = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} r^2 F'(r)\, dr$

Beispiele.

1. Die Polargleichung der Geraden ist



$r = \frac{c}{\sin\varphi \sin(\varphi - v)}$ ..

2. Die Gleichung der Archimedischen Spirale ist $r = av$, also

$S = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} a^2 v^2 dv = \frac{1}{6}a^2(v^3 - v_0^3)$. Setzt man $v_0 = 0$ u. $v = 2\pi$, dann ist $S = \frac{a^2}{6}(2\pi)^3 = \frac{4}{3}a^2\pi^3$

3. Die Gl. eines Kreises ist $r = a =$ Const.

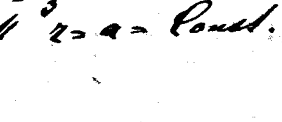
also $S = \int_0^{2\pi} a^2 dv = \frac{2a^2\pi}{2} = \pi a^2$

4. Die Gl. der Ellipse ist $r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$, wobei $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{e}{a}$ und a u. b die beiden Halbaxen sind. Es ist also $S = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dv}{(1-\varepsilon\cos v)^2}$

Für die Parabel ist $\varepsilon = 1$ u. $a = \infty$, alsdann ist $a(1-\varepsilon^2) = \frac{1}{2}p$ u. $S = \int_{v_0}^{v}\frac{p^2}{8}\frac{dv}{(1+\cos v)^2} = \frac{p^2}{32}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{\cos^4\frac{1}{2}v}$

5. Man soll den Flächeninhalt der Lemniscate finden.

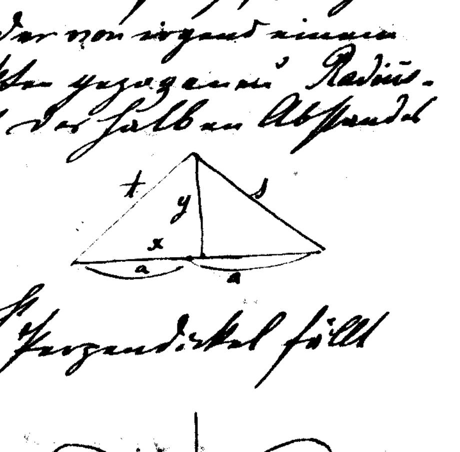
Die Lemniscate kann auf zweierlei Arten entstanden gedacht werden: einmal, wenn man nach der Curve frägt, welche die Eigenschaft hat, daß das Product der von irgend einem Punkte der Curve nach zwei festen Punkten gezogenen Radiusvectoren constant u. gleich dem Quadrat des halben Abstandes der festen Punkte, daß also $r.s = a^2$



Ferner erhält man dieselbe Curve, wenn man von allen Punkten einer gleichseitigen Hyperbel Tangenten zieht und vom Mittelpunkte auf dieselben Perpendikel fällt und die Fußpunkte verbindet.

Die Gl. der Curve für rechtwinklige Coordinaten ist $((a+x)^2+y^2)((a-x)^2+y^2) = a^4$

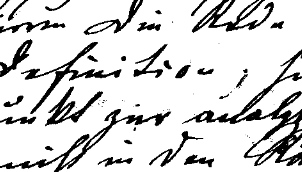
Und für Polarcoordinaten, den Pol



ebenfalls in der Mitte genommen ist $r^2 = 2a^2 \cos 2v$
so ist unbestimmt genommen $S = \int a^2 \cos 2v \, dv = \frac{a^2}{2} \sin 2v + \text{Const}$
Zwischen den Grenzen v_0 und v genommen ist $S = \frac{a^2}{2}(\sin 2v - \sin 2v_0)$
Soll der Inhalt der ganzen Curve gefunden werden so darf man weil die Function unter dem Integralzeichen $\cos 2v$ ist und negativ zu werden anfängt, wenn $v = \frac{\pi}{4}$ wird, die Grenzen nicht über diese Werthe hinausgehen. Man darf nur v. $v_0 = -\frac{\pi}{4}$ bis $v = +\frac{\pi}{4}$ integriren und erhält so den halben Raum, nämlich $S = a^2$ also den ganzen Raum $= 2a^2$
Im allgem. muß man genau darauf sehen, daß man die Grenzen über keine Werthe v u. r sich erstrecken läßt für welche die Function unter dem Integralzeichen negativ imaginär oder 0 wird.

B. Rectification ebener Curven.

Gewöhnlich sagt man eine Curve rectificiren heißt die Länge [illegible] finden welche sich ergibt, wenn man die Curve gerade macht. Diese Definition ist jedoch aus mehreren Gründen unzureichend u. schließt sogar einen Cirkel in sich, denn sie ist, in soferne von Geradmachen einer Curve die Rede ist sowohl eine physische u. keine mathem. Definition, sie gibt keinen unmittelbaren Anknüpfungspunkt zur analytischen Bestimmung und läßt sich endlich nicht in den Raum für die Complanation krummer Flächen ausdehnen, was bei ihr verlangt werden muß. Man kann nämlich nicht sagen eine kr. Fläche complaniren heißt den ebenen Raum finden, welchen sie überdeckt, wenn man sie auf einer Ebene ausbreitet, weil dieses Ausbreiten nur bei Kegel, Cylinder etc stattfindet, bei andern aber Kugel, Ellipsoid etc nicht geschehen kann. Wir definiren die Länge eines Curvenbogens als diejenige Größe, welcher sich der Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Polygons ohne Ende nähert, wenn man seine Seiten ohne Ende verkleinert, die Anzahl derselben also ohne Ende zunehmen läßt.



Wir betrachten einen Punkt der Curve dessen Ordinate $y = f(x)$ ist und lassen seine Abscisse x um Δx wachsen wodurch die Ordinate um Δy zunehmen wird. Die Polygonseite $MN = \Delta s$, dann ist $\Delta s = \frac{\Delta x}{\cos \theta} = \Delta x \sec \theta = \Delta x \sqrt{1 + tg^2 \theta} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$
$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, was man auch auf andere Art erhalten hätte, wenn man bedenkt, daß Δs die Hypothenuse

in dem kleinen rechtwinkligen Dreieck ist, dessen Katheten Δx u. Δy sind. Summirt man diese Sehnen, indem man dabei Δx in dx verwandelt und dies bei der Integration unendlich klein werden läßt, so erhält man $s=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+f'(x)^2}$

1. Man soll die Länge der Geraden von x_0 bis x suchen $y=ax+b$; $y'=a$, also $S=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+a^2}=(x-x_0)\sqrt{1+a^2}$.

2. Die Gl. eines Kreises sei $y=\sqrt{a^2-x^2}$; $y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ und $S=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}=a\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{\frac{1}{a^2-x^2}}$.

Unbestimmt integrirt erhält man $a \arcsin\frac{x}{a}+C$ folglich zwischen den Grenzen x_0 u. x, genommen $S=a(\arcsin\frac{x}{a}-\arcsin\frac{x_0}{a})$ für $x_0=0$ u. $x=a$ erhält man den Quadranten $S=\frac{a\pi}{2}$, also den ganzen Umfang $S=2\pi a$

3. Die Gl. der Parabel ist $y^2=px$ u. $y'=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{px}}{2x}$

$S=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\frac{p}{4x}}=\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{\frac{p+4x}{4x}}$ Setzt man $x=z^2$ so ist, Integral:

$$\int dx\sqrt{\frac{p+4x}{4x}}=\int dz\sqrt{4z^2+p}=\frac{z}{2}\sqrt{4z^2+p}+\frac{p}{4}\,l(2z+\sqrt{4z^2+p})+C$$

oder, wenn man z durch x ersetzt, so wird

$$S=\frac{\sqrt{x}}{2}\sqrt{4x+p}+\frac{p}{4}\,l(2\sqrt{x}+\sqrt{4x+p})-\left(\frac{\sqrt{x_0}}{2}\sqrt{4x_0+p}+\frac{p}{4}\,l(2\sqrt{x_0}+\sqrt{4x_0+p})\right)$$

oder. $S=\frac{1}{2}(\sqrt{4x^2+px}-\sqrt{4x_0^2+px_0})+\frac{p}{4}\,l\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{x_0}+\sqrt{4x_0+p}}$ für $x_0=0$ ist:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+px}+\frac{p}{4}\,l\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{4x+p}}{\sqrt{p}}$$, Setzt man $x=\frac{p}{4}$, so ist:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}}+\frac{p}{4}\,l\frac{2\sqrt{\frac{p}{4}}+\sqrt{2p}}{\sqrt{p}}=\frac{p}{2\sqrt{2}}+\frac{p}{4}\,l(1+\sqrt{2})$$

4. Die Kettenlinie zu rectificiren.

Die Gl. ist $a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}=y$; $y'=\frac{a}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{a}}}{a}-\frac{e^{-\frac{x}{a}}}{a}\right)=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}$

folglich $S=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{4+e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} dx\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Unbestimmt integrirt, erhält man

$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+C$ u. $S=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}-e^{+\frac{x_0}{a}}+e^{-\frac{x_0}{a}}\right)$

für $x_0=0$ ist $S=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$ Vergleicht man diesen Ausdruck des Bogens vom Scheitel an gemessen mit y', so ergibt sich $ay'=S$ oder wenn man differenzirt $ay''=S'$ oder $a\frac{d^2y}{dx^2}=S'=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ Sucht man nach der Function y welche dieser Differenzialgl.

Genüge leistet, oder mit andern Worten man verlangt
Das Integral dieser Gl. ist dieses

$y = a\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}$, für $x_0=-x$ ist $S = a\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$

5. Man soll die logarithmische Curve, deren Gl. $y = lx$ ist rectificiren, $y' = \frac{1}{x}$ u. $S = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \int_{x_0}^{x} dx \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
Setzt man $x^2+1=z^2$, so ist $x^2=z^2-1$ u. $\frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{z^2-1}$ od. $\int\frac{dx}{x}\sqrt{x^2+1} = \int\frac{z^2dz}{z^2-1} = z + \int\frac{dz}{z^2-1}$

$= z - \frac{1}{2} l(z+1) + \frac{1}{2} l(z-1) = z + l\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}} + C$

Zwischen den Grenzen x_0 u. x genommen u. statt z den Werth v. x gesetzt ergibt sich

$$S = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x_0^2} + \frac{1}{2} l\frac{(\sqrt{(x^2+1)}-1)(\sqrt{(x_0^2+1)}+1)}{(\sqrt{(x_0^2+1)}-1)(\sqrt{(x^2+1)}+1)}$$

6. Die Cissoide zu rectificiren.
Es ist die Gl. derselben $x = \frac{(2a-y)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}}$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{y}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2a-y}+(2a-y)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}}{y} = -\frac{3y\sqrt{2a-y}+(2a-y)^{\frac{3}{2}}}{2y\sqrt{y}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2a-y}}{2y\sqrt{y}}(3y+2a-y) = \frac{a+y}{y\sqrt{y}}\sqrt{2a-y} = -\frac{(a+y)\sqrt{2ay-y^2}}{y^2}$$

also $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{(a+y)\sqrt{2ay-y^2}}$. Setzt man diesen Werth in die allgem. Formel, so setze man $\frac{2a+3y}{y} = z^2$, $\int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2a\int\frac{z^2}{z^2-3}\,dz$

Um dies letztere Integral finden zu können, setze man noch $z^2-3 = v^2$, also $z^2 = v^2+3$ dann ist $dz = \frac{v\,dv}{\sqrt{v^2+3}}$ und $\int\frac{z^2dz}{z^2-3} = \int\frac{dv}{v}\sqrt{v^2+3}$; dies läßt sich mit Hülfe der Formel für das bin. Diff. finden und durch Substitution erhält man auch

Die meisten Curven lassen sich jedoch nicht in endlicher Form rectificiren, was seinen Grund hauptsächlich darin hat, daß der Ausdruck $\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$ schon eine Irrationalität unter dem Integralzeichen mit sich führt; die Quadratur ist häufiger möglich, als die Rectification, weil sie nur die Function in ihrem Ausdruck $\int y\,dx$ in Anspruch nimmt. In allen Fällen, wo die Integration in endlicher Form nicht geleistet werden kann, muß man zu Näherungen greifen, die in verschiedener Form sein können. So läßt sich eine solche Form angeben, wenn man $\sqrt{1+f'(x)^2}$ in eine Reihe entwickelt aufsteigend od. absteigend nach Potenzen v. $f'(x)$, wenn für die zwischen x_0 u. x liegenden Werthe der Variabeln $f'(x) < 1$ od. $f'(x) > 1$.

Für den ersten Fall erhält man

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = 1 + \frac{1}{2} f'(x)^2 - \frac{1.1}{2.4} f'(x)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot f'(x)^6 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} f'(x)^8 + \dots$$

folglich $s = (x - x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} f'(x)^2 \, dx - \frac{1.1}{2.4} \cdot \int_{x_0}^{x} f'(x)^4 \, dx + \dots$

für den zweiten Fall aber ist:

$$\sqrt{1+f'(x)^2} = f'(x)\sqrt{1+\frac{1}{f'(x)^2}} = f'(x) + \frac{1}{2}\frac{1}{f'(x)} - \frac{1.1}{2.4}\frac{1}{f'(x)^3} + \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{f'(x)^5} - \dots$$

$$s = f(x) - f(x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f'(x)} - \frac{1}{2.4} \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f'(x)^3} + \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f'(x)^5} - \dots$$

In den meisten Fällen ist es ~~nothwendig~~ rathsam nicht auf diesem Wege ohne Weiteres zu rechnen, sondern die früheren Bemerkungen zu berücksichtigen, welche bezüglich der Entwicklung in Reihen gemacht worden sind.

1. Die Ellypse zu rectificiren. Hier ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$S = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2) + b^2 x^2}{a^2(a^2-x^2)}} = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}{a^2 - x^2}}$$

Setzt man $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ so ist $S = \int_{x_0}^{x} dx \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}}$

Es sei $x = az$, so folgt, wenn man dann statt z neu x setzt, dieses x mit dem vorigen aber nicht übereinstimmt $\frac{S}{a} = \int_{\frac{x_0}{a}}^{\frac{x}{a}} dx \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2 x^2}{1-x^2}}$

Welches Integral sich leicht in eine Reihe entwickeln lässt